Résolution par la méthode de variation des paramètres

gilles.picard@etsmtl.ca 20 septembre 2016

Note: les équations ou expressions écrites en noir ont été volontairement non simplifiées. Celles écrites en bleu et qui ne sont pas simplifiées le seront (en vert) en cliquant dessus, suivi de "Enter".

Nous allons résoudre l'équation suivante par la méthode de variation des paramètres:

$\frac{d^2}{dx^2}(y)+y=\tan(x)$ ou, en notation opérateur $(D^2+1)y=\tan(x)$

C'est le 1er exemple de la section 4.5.2. Trouvons la solution homogène avec les zéros de l'équation caractéristique:

$\text{cZeros}(m^2+1,m)$

On aura donc $yh=(c1\cdot\sin(x)+c2\cdot\cos(x))$

Posons comme solution $y=L_1\cdot\sin(x)+L_2\cdot\cos(x)$ où l'on doit trouver la valeur des paramètres L_1 et L_2 . Ces 2 paramètres seront des fonctions que l'on obtient en résolvant le bon système d'équations. Pour simplifier le travail avec Nspire on les nommera plutôt $m1$ *et* $m2$ car la lettre L minuscule ressemble trop au chiffre 1...

On pose donc $y=m1\cdot\sin(x)+m2\cdot\cos(x)$ et on notera la dérivée de $m1$ *et* $m2$ par $m1'=m1p$ *et* $m2'=m2p$. Le système d'équations à résoudre est: $\begin{cases} m1p\cdot u1 + m2p\cdot u2 = 0 \\ m1p\cdot (u1)' + m2p\cdot (u2)' = R(x)\end{cases}$ où $u1=\sin(x)$, $u2=\cos(x)$ et $R(x)=\tan(x)$

$\text{solve}\left(\begin{cases} m1p\cdot\sin(x)+m2p\cdot\cos(x)=0 \\ m1p\cdot\cos(x)+m2p\cdot{}^{-}\sin(x)=\tan(x)\end{cases},\{m1p,m2p\}\right)$

$\text{solve}\left(\begin{cases} m1p\cdot\sin(x)+m2p\cdot\cos(x)=0 \\ m1p\cdot\cos(x)+m2p\cdot{}^{-}\sin(x)=\tan(x)\end{cases},\{m1p,m2p\}\right)$

Pour obtenir les bonnes valeurs de $m1$ *et* $m2$, il faut intégrer les deux solutions obtenues avec la commande solve:

$m1=\int \sin(x)\, dx$

$m2=\int \frac{-(\sin(x))^2}{\cos(x)}\, dx$

On remet les deux solutions obtenues dans $y=m1\cdot\sin(x)+m2\cdot\cos(x)$; en ne mettant pas de constantes d'intégration on obtient alors une solution particulière

yp$=-\cos(x)\cdot\sin(x)+-\left(\ln\left(\frac{{}^{-}\cos(x)}{\sin(x)-1}\right)-\sin(x)\right)\cdot\cos(x)$

La solution générale sera obtenue en additionnant yh et yp:

$ysol=c1\cdot\sin(x)+c2\cdot\cos(x)+-\cos(x)\cdot\ln\left(\frac{{}^{-}\cos(x)}{\sin(x)-1}\right)$

On voit sur la page de calcul suivante les mêmes opérations pour résoudre ce problème et le résultat obtenu avec la commande deSolve pour cette équation.

Dans l'activité 2 de ce classeur, on voit le même exemple de résolution avec la méthode de variation des paramètres mais effectué en utilisant une apporche matricielle pour les calculs.

$(d^2+1)\cdot y=\tan(x)$	$(d^2+1)\cdot y=\tan(x)$
$\text{cZeros}(m^2+1,m)$	$\{\boldsymbol{i},-\boldsymbol{i}\}$

©Les racines sont complexes, du type a±b$\boldsymbol{i}$, on a la solution homogène yh = $(C1\cdot\sin(bx)+C2\cdot\cos(bx))\boldsymbol{e}^{ax}$

$yh:=c1\cdot\sin(x)+c2\cdot\cos(x)$	$c2\cdot\cos(x)+c1\cdot\sin(x)$

©Posons comme solution y = m1· u1 + m2· u2 où u1=sin (x) et u2=cos(x)

$yp:=m1\cdot\sin(x)+m2\cdot\cos(x)$	$m2\cdot\cos(x)+m1\cdot\sin(x)$

©en nommant m1p et m2p les dérivées respectives de m1 et m2, on aura à résoudre le système:

$\text{solve}\left(\begin{cases}m1p\cdot\sin(x)+m2p\cdot\cos(x)=0\\ m1p\cdot\cos(x)+m2p\cdot{}^{-}\sin(x)=\tan(x)\end{cases},\{m1p,m2p\}\right)$	$\cos(x)\neq 0 \text{ and } m1p=\sin(x) \text{ and } m2p=\frac{-(\sin(x))^2}{\cos(x)}$
$\int m1p\ dx \vert m1p=\sin(x)$	$^{-}\cos(x)$
$\int m2p\ dx \vert m2p=\frac{-(\sin(x))^2}{\cos(x)}$	$-\left(\ln\left(\frac{^{-}\cos(x)}{\sin(x)-1}\right)-\sin(x)\right)$

©La solution particulière cherchée sera (on laisse tomber les constantes d'intégration pour obtenir celle−ci)

$yp:=m1\cdot\sin(x)+m2\cdot\cos(x) \vert m1={}^{-}\cos(x) \text{ and } m2=-\left(\ln\left(\frac{^{-}\cos(x)}{\sin(x)-1}\right)-\sin(x)\right)$	$^{-}\cos(x)\cdot\ln\left(\frac{^{-}\cos(x)}{\sin(x)-1}\right)$

©La solution générale s'obtient en additionnant yh et yp

$ysol:=yh+yp$	$^{-}\cos(x)\cdot\ln\left(\frac{^{-}\cos(x)}{\sin(x)-1}\right)+c2\cdot\cos(x)+c1\cdot\sin(x)$

©On peut vérifier cette réponse en la remettant dans l'équation initiale

⚠ $\frac{d^2}{dx^2}(y)+y \vert y=ysol$	$\frac{-\left((\cos(x))^4+(\sin(x)-1)\cdot(2\cdot\sin(x)+1)\cdot(\cos(x))^2+(\sin(x))^2\cdot(\sin(x)-1)^2\right)}{(\sin(x)-1)^2\cdot\cos(x)}$
⚠ $\text{expand}\left(\frac{-\left((\cos(x))^4+(\sin(x)-1)\cdot(2\cdot\sin(x)+1)\cdot(\cos(x))^2+(\sin(x))^2\cdot(\sin(x)-1)^2\right)}{(\sin(x)-1)^2\cdot\cos(x)}\right)$	$\frac{-(\cos(x))^3}{(\sin(x)-1)^2}-\frac{2\cdot(\sin(x))^2\cdot\cos(x)}{(\sin(x)-1)^2}+\frac{\sin(x)\cdot\cos(x)}{(\sin(x)-1)^2}+\frac{\cos(x)}{(\sin(x)-1)^2}-\frac{(\sin(x))^4}{(\sin(x)-1)^2\cdot\cos(x)}+\frac{2\cdot(\sin(x))^3}{(\sin(x)-1)^2\cdot\cos(x)}-\frac{(\sin(}{(\sin(x)-1)}$ ▸
⚠ $\text{tExpand}\left(\frac{-(\cos(x))^3}{(\sin(x)-1)^2}-\frac{2\cdot(\sin(x))^2\cdot\cos(x)}{(\sin(x)-1)^2}+\frac{\sin(x)\cdot\cos(x)}{(\sin(x)-1)^2}+\frac{\cos(x)}{(\sin(x)-1)^2}-\frac{(\sin(x))^4}{(\sin(x)-1)^2\cdot\cos(x)}+\frac{2\cdot(\sin(x))^3}{(\sin(x)-1)^2\cdot\cos(x)}-\right.$ ▸	$\tan(x)$

©On peut vérifier cette réponse avec la commande desolve

deSolve$(y''+y=\tan(x),x,y)$

$$y=\boldsymbol{c5}\cdot\cos(x)+\boldsymbol{c6}\cdot\sin(x)-\cos(x)\cdot\ln\left(\frac{^-\cos(x)}{\sin(x)-1}\right)$$

©On peut aussi vérifier la réponse en la remettant dans l'équation initiale

$\frac{d^2}{dx^2}(y)+y|y=ysol$

$$\frac{^-\left((\cos(x))^4+(\sin(x)-1)\cdot(2\cdot\sin(x)+1)\cdot(\cos(x))^2+(\sin(x))^2\cdot(\sin(x)-1)^2\right)}{(\sin(x)-1)^2\cdot\cos(x)}$$

expand$\left(\frac{^-\left((\cos(x))^4+(\sin(x)-1)\cdot(2\cdot\sin(x)+1)\cdot(\cos(x))^2+(\sin(x))^2\cdot(\sin(x)-1)^2\right)}{(\sin(x)-1)^2\cdot\cos(x)}\right)$

$$\frac{^-(\cos(x))^3}{(\sin(x)-1)^2}-\frac{2\cdot(\sin(x))^2\cdot\cos(x)}{(\sin(x)-1)^2}+\frac{\sin(x)\cdot\cos(x)}{(\sin(x)-1)^2}+\frac{\cos(x)}{(\sin(x)-1)^2}-\frac{(\sin(x))^4}{(\sin(x)-1)^2\cdot\cos(x)}+\frac{2\cdot(\sin(x))^3}{(\sin(x)-1)^2\cdot\cos(x)}-\frac{(\sin(}{(\sin(x)-1)}\blacktriangleright$$

tExpand$\left(\frac{^-(\cos(x))^3}{(\sin(x)-1)^2}-\frac{2\cdot(\sin(x))^2\cdot\cos(x)}{(\sin(x)-1)^2}+\frac{\sin(x)\cdot\cos(x)}{(\sin(x)-1)^2}+\frac{\cos(x)}{(\sin(x)-1)^2}-\frac{(\sin(x))^4}{(\sin(x)-1)^2\cdot\cos(x)}+\frac{2\cdot(\sin(x))^3}{(\sin(x)-1)^2\cdot\cos(x)}-\blacktriangleright\right.$

$$\tan(x)$$

Activité 2

©Avec les mêmes notations qu'à l'activité précédente, on peut écrire le système d'équation sous forme matricielle

$m:=\begin{bmatrix} u1 & u2 \\ \frac{d}{dx}(u1) & \frac{d}{dx}(u2)\end{bmatrix}|u1=\sin(x)$ and $u2=\cos(x)$

$$\begin{bmatrix}\sin(x) & \cos(x)\\ \cos(x) & ^-\sin(x)\end{bmatrix}$$

$sol:=\begin{bmatrix} m1p \\ m2p\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} m1p \\ m2p\end{bmatrix}$$

$k:=\begin{bmatrix} 0 \\ \tan(x)\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \tan(x)\end{bmatrix}$$

$m\cdot sol=k$

$$\begin{bmatrix} m2p\cdot\cos(x)+m1p\cdot\sin(x)=0 \\ m1p\cdot\cos(x)-m2p\cdot\sin(x)=\tan(x)\end{bmatrix}$$

©La solution s'obtient en utilisant la matrice inverse de m

$m^{-1}\cdot k$

$$\begin{bmatrix}\sin(x)\\ \frac{^-(\sin(x))^2}{\cos(x)}\end{bmatrix}$$

©On intègre ce résultat pour trouver m1 et m2 et on met le résultat en mémoire dans rep

$rep:=\int\begin{bmatrix}\sin(x)\\ \frac{^-(\sin(x))^2}{\cos(x)}\end{bmatrix}\,dx$

$$\begin{bmatrix} ^-\cos(x) \\ ^-\left(\ln\left(\frac{^-\cos(x)}{\sin(x)-1}\right)-\sin(x)\right)\end{bmatrix}$$

$$rep:=\int \begin{bmatrix} \sin(x) \\ \frac{-(\sin(x))^2}{\cos(x)} \end{bmatrix} dx \qquad \begin{bmatrix} -\cos(x) \\ -\left(\ln\left(\frac{-\cos(x)}{\sin(x)-1}\right)-\sin(x)\right) \end{bmatrix}$$

$$rep[1,1] \qquad -\cos(x)$$

$$rep[2,1] \qquad -\left(\ln\left(\frac{-\cos(x)}{\sin(x)-1}\right)-\sin(x)\right)$$

$$rep[1,1]\cdot \sin(x)+rep[2,1]\cdot \cos(x) \qquad -\cos(x)\cdot \ln\left(\frac{-\cos(x)}{\sin(x)-1}\right)$$

©Ce dernier résultat est la solution particulière, en lui additionnant la solution homogène, on obtient

$$-\cos(x)\cdot \ln\left(\frac{-\cos(x)}{\sin(x)-1}\right)+c1\cdot \sin(x)+c2\cdot \cos(x) \qquad -\cos(x)\cdot \ln\left(\frac{-\cos(x)}{\sin(x)-1}\right)+c2\cdot \cos(x)+c1\cdot \sin(x)$$