©Résolvez par transformées de Laplace l'équation suivante:

© $\frac{d^2}{dt^2}(x)+4x=f(t)=\begin{cases}2, & \text{si } 0<t<4\\ 0, & \text{si } t\geq 4\end{cases}$ avec les conditions initiales $x(0)=2$ et $x'(0)=0$

©La fonction $f(t)$ peut s'écrire $f(t)=2-2\cdot u(t-4)$

©Prenons la transformée de Laplace de l'équation en utilisant les propriétés de la table:

$s^2\cdot x-s\cdot x(0)-x'(0)+4\cdot x=\frac{2}{s}-\frac{2\cdot e^{-4\cdot s}}{s}$ $\quad s^2\cdot x-s\cdot x(0)+4\cdot x-x'(0)=\frac{2}{s}-\frac{2\cdot e^{-4\cdot s}}{s}$

©Utilisons les conditions initiales:

$s^2\cdot x-s\cdot 2-0+4\cdot x=\frac{2}{s}-\frac{2\cdot e^{-4\cdot s}}{s}$ $\quad s^2\cdot x-2\cdot s+4\cdot x=\frac{2}{s}-\frac{2\cdot e^{-4\cdot s}}{s}$

©Résolvez l'équation et simplifions

$\text{solve}\left(s^2\cdot x-s\cdot 2-0+4\cdot x=\frac{2}{s}-\frac{2\cdot e^{-4\cdot s}}{s},x\right)$ $\quad x=\frac{2\cdot e^{-4\cdot s}\cdot\left(\left(s^2+1\right)\cdot e^{4\cdot s}-1\right)}{s\cdot\left(s^2+4\right)}$

⚠ $\text{expand}\left(x=\frac{2\cdot e^{-4\cdot s}\cdot\left(\left(s^2+1\right)\cdot e^{4\cdot s}-1\right)}{s\cdot\left(s^2+4\right)},s\right)$ $\quad x=\frac{s}{2\cdot\left(s^2+4\right)\cdot\left(e^{s}\right)^4}-\frac{1}{2\cdot s\cdot\left(e^{s}\right)^4}+\frac{3\cdot s}{2\cdot\left(s^2+4\right)}+\frac{1}{2\cdot s}$

©Pour simplifier cette forme bizarre, on n'a qu'à choisir l'expression suivi de "enter""

⚠ $x=\frac{s}{2\cdot\left(s^2+4\right)\cdot\left(e^{s}\right)^4}-\frac{1}{2\cdot s\cdot\left(e^{s}\right)^4}+\frac{3\cdot s}{2\cdot\left(s^2+4\right)}+\frac{1}{2\cdot s}$ $\quad x=\left(\frac{s}{2\cdot\left(s^2+4\right)}-\frac{1}{2\cdot s}\right)\cdot e^{-4\cdot s}+\frac{3\cdot s}{2\cdot\left(s^2+4\right)}+\frac{1}{2\cdot s}$

©La 2e partie de la transformée inverse est facile puisque les 2 termes sont directement dans la table

©L'inverse de $\cdot\frac{3\cdot s}{2\cdot\left(s^2+4\right)}+\frac{1}{2\cdot s}$ est $\cdot\frac{3}{2}\cdot\cos(2t)+\frac{1}{2}$ avec les propriétés P1 et P7

©Pour l'autre partie on devra utiliser P22 avec $F(s)=\frac{s}{2\cdot\left(s^2+4\right)}-\frac{1}{2\cdot s}$, ce qui donne $f(t)=\frac{1}{2}\cdot\cos(2t)-\frac{1}{2}$

©L'inverse de cette partie sera donc $f(t-4)\cdot u(t-4)=\left(\frac{1}{2}\cdot\cos(2\cdot(t-4))-\frac{1}{2}\right)\cdot u(t-4)$

©La solution finale est: $x(t)=\frac{3}{2}\cdot\cos(2t)+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\cdot\cos(2\cdot(t-4))-\frac{1}{2}\right)\cdot u(t-4)$

©On peut aussi écrire $x(t)=\left(\frac{3}{2}\cdot\cos(2t)+\frac{1}{2}\right)\cdot u(t)+\left(\frac{1}{2}\cdot\cos(2\cdot(t-4))-\frac{1}{2}\right)\cdot u(t-4)$ si on veut insister que la solution commence à t=0

©Définissons la fonction échelon−unité, appellons−la step (t)

$step(t):=\frac{1+\text{sign}(t)}{2}$ *Terminé*

©Pour faire le graphe de la solution, mettons celle−ci dans une fonction f (t) et remplaçons $u(t-4)$ par $step(t-4)$

$f(t):=\left(\frac{1}{2}\cdot\cos(2\cdot(t-4))-\frac{1}{2}\right)\cdot step(t-4)+\left(\frac{3}{2}\cdot\cos(2\cdot t)+\frac{1}{2}\right)\cdot step(t)$ *Terminé*

©Comme la première partie n'apparait qu'après t=4, on peut ré−écrire la solution comme ceci:

© $\mathrm{ff}(t):=\begin{cases}\frac{3}{2}\cdot\cos(2\cdot t)+\frac{1}{2}, & \text{si } 0<t<4\\ \frac{3}{2}\cdot\cos(2\cdot t)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\cos(2\cdot(t-4))-\frac{1}{2}, & \text{si } t\geq 4\end{cases}$

$ff(t):=\begin{cases}\frac{3}{2}\cdot\cos(2\cdot t)+\frac{1}{2}, & si\cdot 0<t<4\\ \frac{3}{2}\cdot\cos(2\cdot t)+\frac{1}{2}\cdot\cos(2\cdot t-8), & si\cdot t\geq 4\end{cases}$ *Terminé*

©La prochaine page montre le graphe de cette solution ainsi que le graphe de la solution si t≥4