©Calcul de la série de Fourier d'une fonction périodique

©Considérons la fonction $f(x)=4-2x$ sur l'intervalle $0<x<2$. On veut en faire un prolongement pair périodique.

©La période sera donc $P=4$ et la fonction sur 1 période peut s'écrire $g(x)=\begin{cases}4-2x, 0<x<2\\4+2x, -2<x<0\end{cases}$ ou $h(x)=\begin{cases}4-2x, & 0<x<2\\-4+2x, & 2<x<4\end{cases}$

©Si g est une fonction sur une période $a<x<b$ et qu'on la rend périodique de période $P=b-a$ à l'extérieur de cette intervalle

©la fonction modulo, mod( ) permet de tracer la fonction périodique en faisant: $g(\mathrm{mod}(x-a, b-a)+a)$

©les pages 2 et 3 illustrent ceci en traçant cette fonction périodique

$g(x):=\begin{cases}4-2\cdot x, 0<x<2\\4+2\cdot x, {}^{-}2<x<0\end{cases}$ *Terminé*

$h(x):=\begin{cases}4-2\cdot x, 0<x<2\\2\cdot x-4, 2<x<4\end{cases}$ *Terminé*

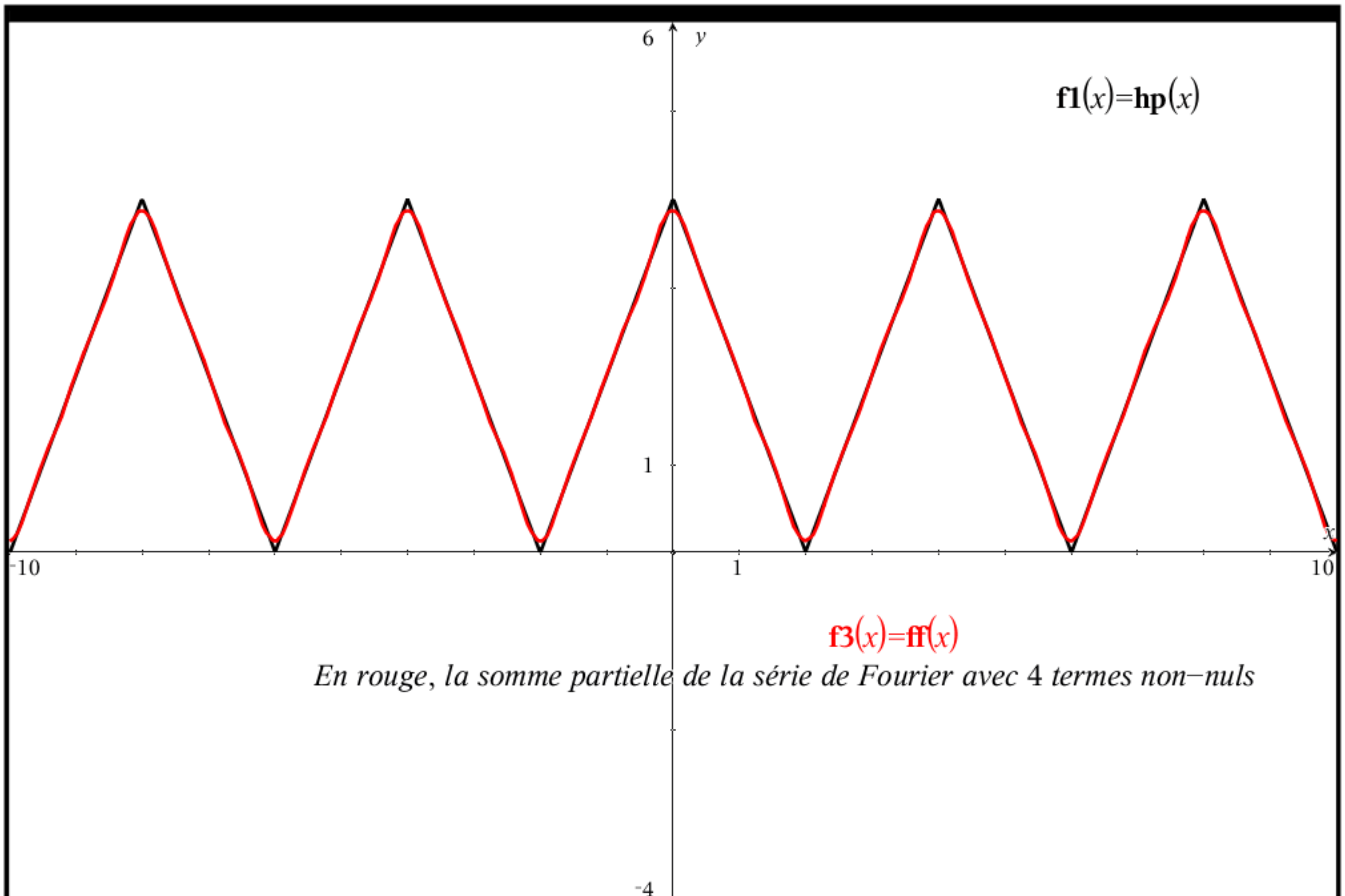
$hp(x):=h(\mathrm{mod}(x,4))$ *Terminé*

$gp(x):=g(\mathrm{mod}(x-{}^{-}2,4)+{}^{-}2)$ *Terminé*

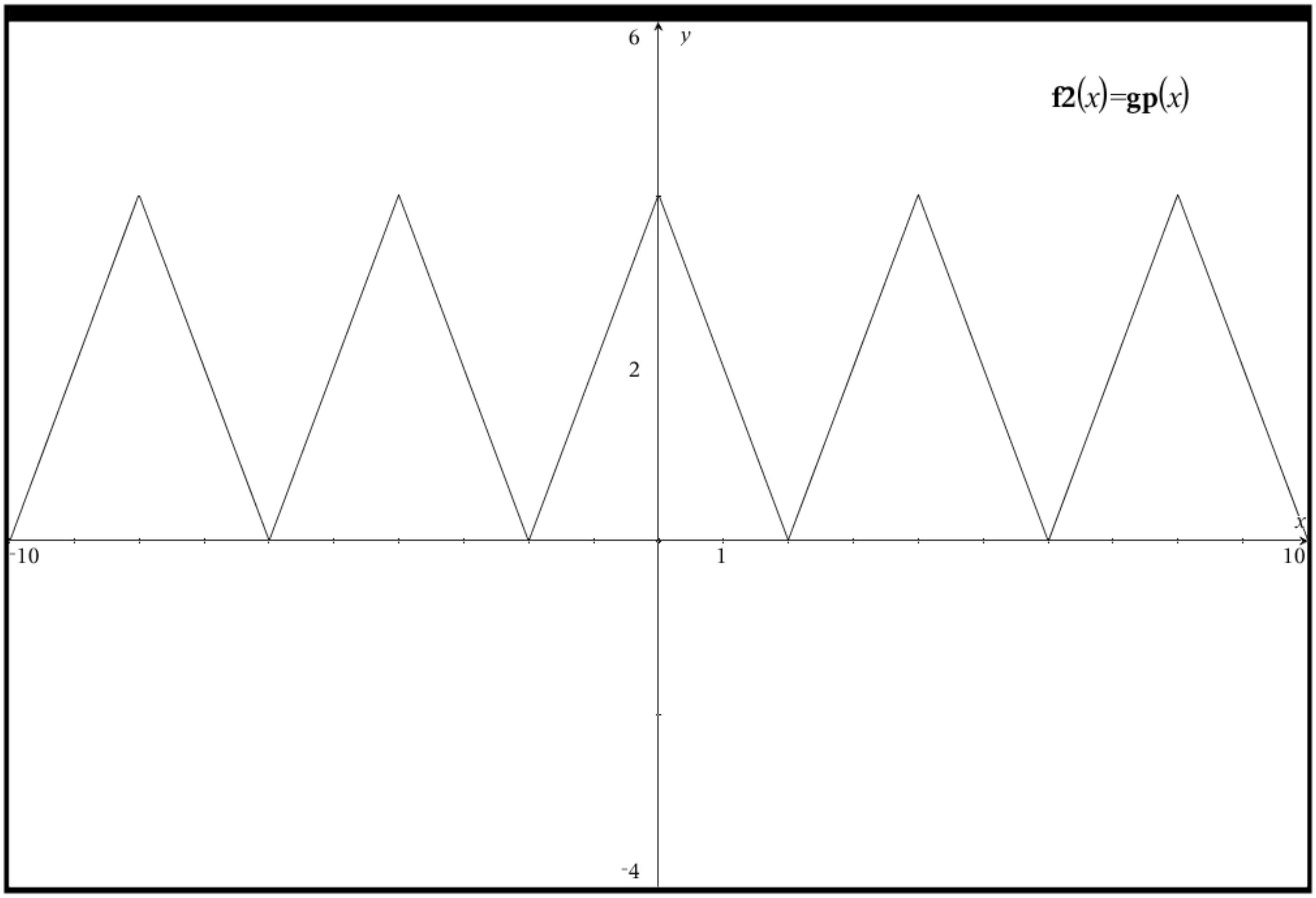
©Quand la fonction initiale, sur 1 période, peut s'écrire sur l'intervalle $0<x<P$, l'écriture est plus simple (car $a = 0$)

©À la page 4, on fera les calculs pour déterminer la représentation par série de Fourier de cette fonction périodique.

©Calcul de la série de Fourier d'une fonction périodique



En rouge, la somme partielle de la série de Fourier avec 4 termes non−nuls



©Le coefficient a0 de cette série se calcule avec $a0=\frac{2}{P}\int_{c}^{c+P} f(x)\,dx$, l'important est ici d'intégrer sur une longueur de période (choisir ce qui est plus simple)

©Comme la période est ici P=4 et que la fonction est en 2 morceaux cela implique 2 intégrales:

$\frac{2}{4}\cdot\left(\int_{0}^{2}(4-2\cdot x)\,dx+\int_{-2}^{0}(4+2\cdot x)\,dx\right)$ ©*si on utilise la fonction g (x)* 4

$\frac{2}{4}\cdot\left(\int_{0}^{2}(4-2\cdot x)\,dx+\int_{2}^{4}(2\cdot x-4)\,dx\right)$ ©*si on utilise la fonction h (x)* 4

©On aurait pu également se souvenir que, par construction, la fonction est paire et alors $\int_{-a}^{a} f_{paire}(x)\,dx=2\cdot\int_{0}^{a} f_{paire}(x)\,dx$

$a0:=\frac{2\cdot 2}{4}\cdot\int_{0}^{2}(4-2\cdot x)\,dx$ 4

©Donc, la valeur moyenne de la fonction sur une période, $\frac{a0}{2}$, vaudra ici 2 ce qui était assez évident en regardant le graphe.

©Sur la page suivante, on calcule les coefficents a_n

©Sur la page suivante, on calcule les coefficents a_n ou a (n) de la série. La fonction étant paire, les coefficients b_n seront nuls.

©Les coefficients a(n) de cette série se calcule avec a $(n)=\frac{2}{P}\int_{c}^{c+P}\left(f(x)\cdot\cos\left(n\cdot\frac{2\pi}{P}x\right)\right)dx$

$\frac{2}{4}\cdot\left(\int_{0}^{2}\left((4-2\cdot x)\cdot\cos\left(n\cdot\frac{2\cdot\pi}{4}\cdot x\right)\right)dx+\int_{-2}^{0}\left((4+2\cdot x)\cdot\cos\left(n\cdot\frac{2\cdot\pi}{4}\cdot x\right)\right)dx\right)$ ©*si on utilise la fonction g (x)* $\qquad \frac{-8\cdot(\cos(n\cdot\pi)-1)}{n^2\cdot\pi^2}$

©Comme pour la calcul de a0, la fonction est paire et cos () est paire donc le produit est pair, on peut calculer a (n) uniquement sur 0<x<2

$a(n):=2\cdot\frac{2}{4}\cdot\int_{0}^{2}\left((4-2\cdot x)\cdot\cos\left(n\cdot\frac{2\cdot\pi}{4}\cdot x\right)\right)dx$ *Terminé*

$a(n) \qquad \frac{8}{n^2\cdot\pi^2}-\frac{8\cdot\cos(n\cdot\pi)}{n^2\cdot\pi^2}$

©On peut simplifier a (n) en indiquant que n est une constante entière, on tape @n1 pour cela:

$a(\boldsymbol{n1}) \qquad \frac{8}{\boldsymbol{n1}^2\cdot\pi^2}-\frac{8\cdot(-1)^{\boldsymbol{n1}}}{\boldsymbol{n1}^2\cdot\pi^2}$

©Calculons les 6 premiers coefficients a (n)

©Calculons les 6 premiers coefficients a (n)

$\mathrm{seq}(a(n),n,1,6) \qquad \left\{\frac{16}{\pi^2},0,\frac{16}{9\cdot\pi^2},0,\frac{16}{25\cdot\pi^2},0\right\}$

©Calculons une somme partielle de la série de Fourier:

$\frac{a0}{2}+\sum_{n=1}^{6}\left(a(n)\cdot\cos\left(n\cdot\frac{2\cdot\pi}{4}\cdot x\right)\right) \qquad \frac{16\cdot\cos\left(\frac{5\cdot\pi\cdot x}{2}\right)}{25\cdot\pi^2}+\frac{16\cdot\cos\left(\frac{3\cdot\pi\cdot x}{2}\right)}{9\cdot\pi^2}+\frac{16\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot x}{2}\right)}{\pi^2}+2$

$\frac{16\cdot\cos\left(\frac{5\cdot\pi\cdot x}{2}\right)}{25\cdot\pi^2}+\frac{16\cdot\cos\left(\frac{3\cdot\pi\cdot x}{2}\right)}{9\cdot\pi^2}+\frac{16\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot x}{2}\right)}{\pi^2}+2\rightarrow ff(x)$ *Terminé*

©Retournons à la page 2 tracer cette somme partielle pour vérifier que celle−ci "approxime" bien la fonction périodique

©Cochez la case du nom de ma fonction contenant la somme partielle

$\frac{a0}{2}+\sum_{n=1}^{6}\left(a(n)\cdot\cos\left(n\cdot\frac{2\cdot\pi}{4}\cdot x\right)\right)\rightarrow d(x)$ *Terminé*

©La ligne précédente illustre ce qu'on ne devrait jamais faire. Le logiciel ne simplifie pas l'expression avant de la tracer.

©Cela signifie que pour chaque point du graphe, il faudra recalculer la sommation indiquée, incluant les intégrales sous−jacentes dans a (n)

©Cela sera très long, sur la calcu au moins 10 fois plus long. Sur la calcu on appuie sur la touche ON au moins 5 secondes pour arrêter une opération.

©Sur l'ordinateur, on appuie sur la touche Pause ou Break quelques secondes pour arrêter les calculs ou le tracé qui prend trop de temps.

©On peut éviter ce dernier problème, en mettant en mémoire dans a (n) le résultat de l'intégrale et non l'intégrale en fonction de n.

$2\cdot\frac{2}{4}\cdot\int_0^2 \left((4-2\cdot x)\cdot\cos\left(n\cdot\frac{2\cdot\pi}{4}\cdot x\right)\right)dx$ — $\frac{8}{n^2\cdot\pi^2}-\frac{8\cdot\cos(n\cdot\pi)}{n^2\cdot\pi^2}$

$\frac{8}{n^2\cdot\pi^2}-\frac{8\cdot\cos(n\cdot\pi)}{n^2\cdot\pi^2}\rightarrow aa(n)$ — *Terminé*

$aa(n)$ — $\frac{8}{n^2\cdot\pi^2}-\frac{8\cdot\cos(n\cdot\pi)}{n^2\cdot\pi^2}$

$\frac{a0}{2}+\sum_{n=1}^{6}\left(aa(n)\cdot\cos\left(n\cdot\frac{2\cdot\pi}{4}\cdot x\right)\right)\rightarrow dfast(x)$ — *Terminé*

Define $a(n)=2\cdot\frac{2}{4}\cdot\int_0^2 \left((4-2\cdot x)\cdot\cos\left(n\cdot\frac{2\cdot\pi}{4}\cdot x\right)\right)dx$ — *Terminé*

Activité 2

©Considérons la fonction sin (x) pour $0<x<\pi$. On la prolonge pour en faire une fonction périodique de période $P=\pi$

©De façon équivalente, on peut considérez cette fonction f $(x)=|\sin(x)|$

$a0:=\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}\sin(x)\,dx$ — $\frac{4}{\pi}$

©La fonction étant paire (voir graphe à la page 2.3), on sait que les coefficients b (n) seront nuls. Vérifions cela:

$b(n):=\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}\left(\sin(x)\cdot\sin\left(n\cdot\frac{2\cdot\pi}{\pi}\cdot x\right)\right)dx$ — *Terminé*

$b(n)$ — $\left(\frac{1}{(2\cdot n+1)\cdot\pi}-\frac{1}{(2\cdot n-1)\cdot\pi}\right)\cdot\sin(2\cdot n\cdot\pi)$

©Le logiciel ne sachant pas que n est un entier positif, il ne nous donne pas la valeur nulle cherchée. Mais si on remplace n par @n1

$b(\boldsymbol{n1})$ — 0

$a(n):=\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}\left(\sin(x)\cdot\cos\left(n\cdot\frac{2\cdot\pi}{\pi}\cdot x\right)\right)\mathrm{d}x$ *Done*

$a(\boldsymbol{n1})$ $\frac{2}{(2\cdot \boldsymbol{n1}+1)\cdot\pi}-\frac{2}{(2\cdot \boldsymbol{n1}-1)\cdot\pi}$

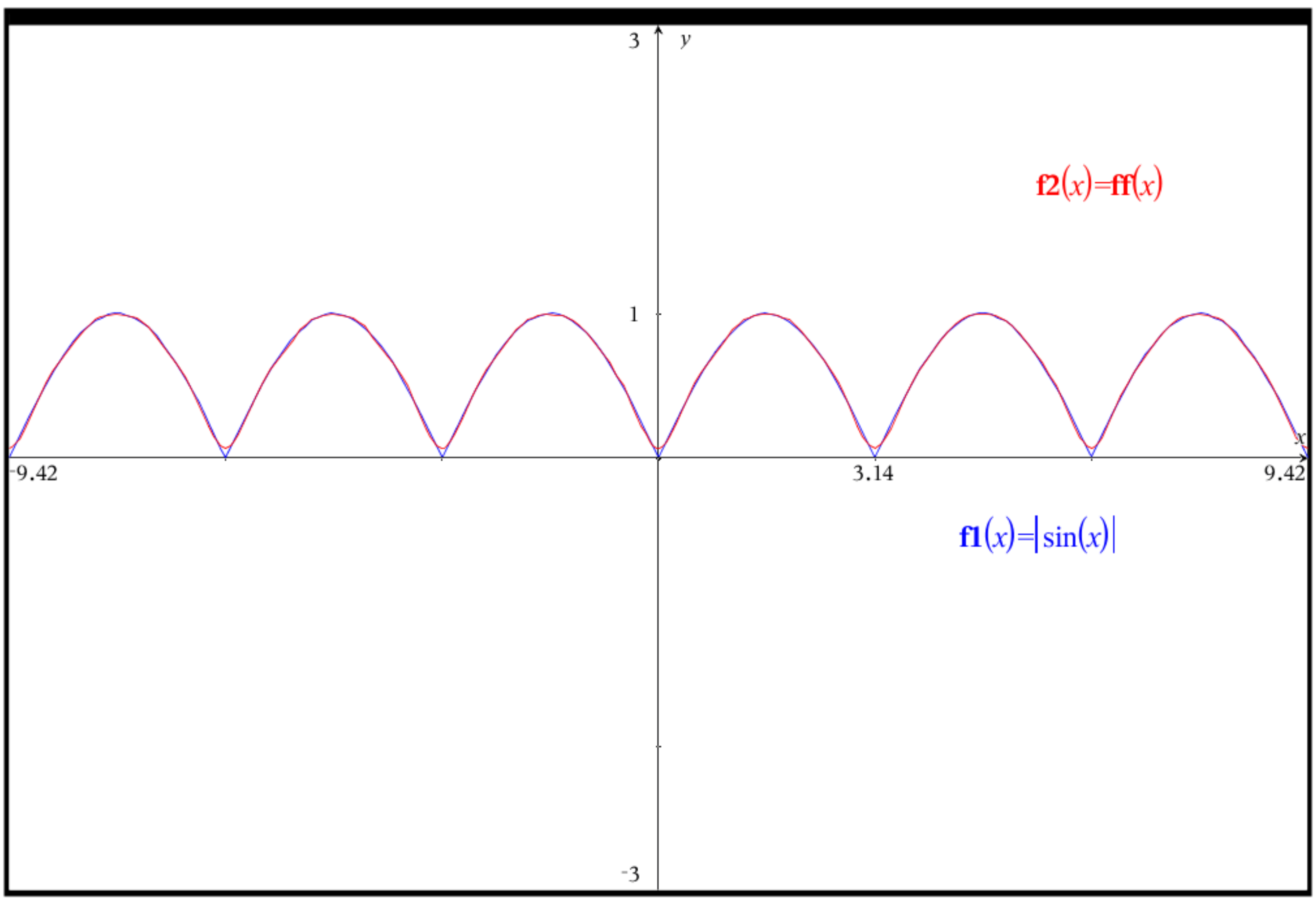
$a(n)$ $\left(\frac{1}{(2\cdot n+1)\cdot\pi}-\frac{1}{(2\cdot n-1)\cdot\pi}\right)\cdot\cos(2\cdot n\cdot\pi)+\frac{1}{(2\cdot n+1)\cdot\pi}-\frac{1}{(2\cdot n-1)\cdot\pi}$

$\frac{a0}{2}+\sum_{n=1}^{4}\left(a(n)\cdot\cos(2\cdot n\cdot x)\right)$ $\frac{^-4\cdot\cos(8\cdot x)}{63\cdot\pi}-\frac{4\cdot\cos(6\cdot x)}{35\cdot\pi}-\frac{4\cdot\cos(4\cdot x)}{15\cdot\pi}-\frac{4\cdot\cos(2\cdot x)}{3\cdot\pi}+\frac{2}{\pi}$

$\frac{^-4\cdot\cos(8\cdot x)}{63\cdot\pi}-\frac{4\cdot\cos(6\cdot x)}{35\cdot\pi}-\frac{4\cdot\cos(4\cdot x)}{15\cdot\pi}-\frac{4\cdot\cos(2\cdot x)}{3\cdot\pi}+\frac{2}{\pi}\rightarrow ff(x)$ *Done*

©On constate à la page suivante que même avec peu de termes de la série, le résultat est très proche de la fonction initiale.

©Dans l'activité suivante, une fonction semblable à celle−ci mais avec un problème potentiel…



©Considérons la fonction $f(x)=\begin{cases}\sin(x), 0<x<\pi \\ 0, \quad \pi<x<2\pi\end{cases}$. On la prolonge pour en faire une fonction périodique de période P=2π

$f(x):=\begin{cases}\sin(x), 0<x<\pi \\ 0, \quad \pi<x<2\cdot\pi\end{cases}$	*Done*
$g(x):=f(\mathrm{mod}(x,2\cdot\pi))$	*Done*
$a0:=\frac{2}{2\cdot\pi}\cdot\int_0^{\pi}\sin(x)\,dx$ ©*on peut laisser tomber la 2e intégrale, la fonction est nulle sur π<x<2π*	$\frac{2}{\pi}$
$b(n):=\frac{2}{2\cdot\pi}\cdot\int_0^{\pi}(\sin(x)\cdot\sin(n\cdot x))dx$	*Done*
⚠ $b(n)$	$\left(\frac{1}{2\cdot(n+1)\cdot\pi}-\frac{1}{2\cdot(n-1)\cdot\pi}\right)\cdot\sin(n\cdot\pi)$
$b(\boldsymbol{n1})$	0

©On pourrait faire l'erreur de penser que tous les termes b (n) sont nuls ici, mais c'est faux. D'ailleurs on voit bien que le résultat est faux si n=1

$\mathrm{seq}(b(n),n,1,5)$	$\left\{\frac{1}{2},0,0,0,0\right\}$
$b(1)$	$\frac{1}{2}$

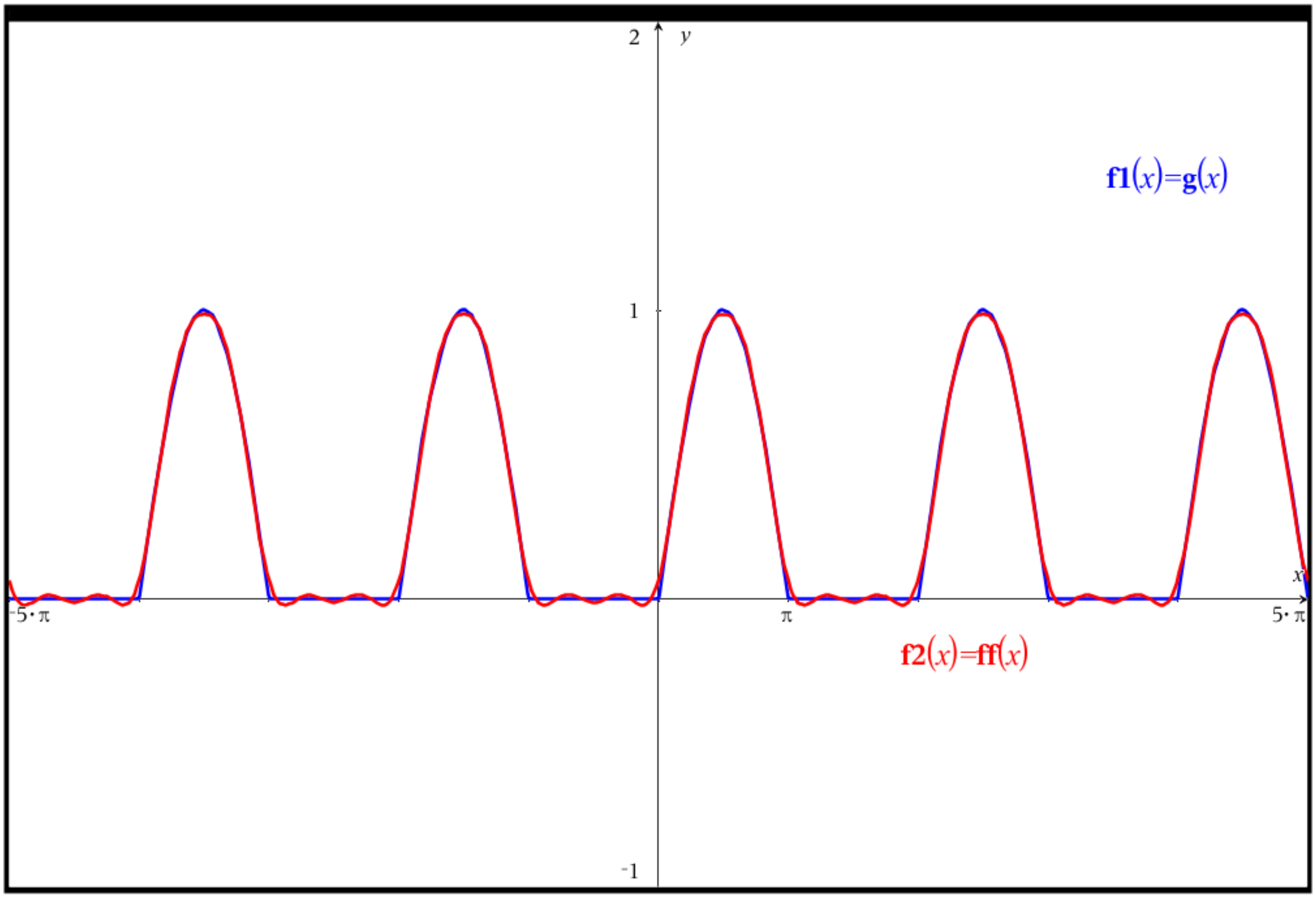
©Si on met le résultat de l'intégrale dans b (n), on s'assure d'avoir un problème...

$\frac{2}{2\cdot\pi}\cdot\int_0^{\pi}(\sin(x)\cdot\sin(n\cdot x))dx$	$\left(\frac{1}{2\cdot(n+1)\cdot\pi}-\frac{1}{2\cdot(n-1)\cdot\pi}\right)\cdot\sin(n\cdot\pi)$
$\left(\frac{1}{2\cdot(n+1)\cdot\pi}-\frac{1}{2\cdot(n-1)\cdot\pi}\right)\cdot\sin(n\cdot\pi)\to bb(n)$	*Done*
$\mathrm{seq}(bb(n),n,1,5)$	$\{\mathrm{undef},0,0,0,0\}$

©En définissant $b(n):=\frac{2}{2\cdot\pi}\cdot\int_0^{\pi}(\sin(x)\cdot\sin(n\cdot x))dx$ de cette façon on évite ce problème, puisque l'intégrale est recalculée à chaque fois que l'on veut b (n)

$a(n):=\frac{2}{2\cdot\pi}\cdot\int_0^{\pi}(\sin(x)\cdot\cos(n\cdot x))dx$	*Done*
$\mathrm{seq}(a(n),n,1,5)$	$\left\{0,\frac{-2}{3\cdot\pi},0,\frac{-2}{15\cdot\pi},0\right\}$
$\frac{a0}{2}+\sum_{n=1}^{5}(a(n)\cdot\cos(n\cdot x)+b(n)\cdot\sin(n\cdot x))$	$\frac{-2\cdot\cos(4\cdot x)}{15\cdot\pi}-\frac{2\cdot\cos(2\cdot x)}{3\cdot\pi}+\frac{\sin(x)}{2}+\frac{1}{\pi}$
$\frac{-2\cdot\cos(4\cdot x)}{15\cdot\pi}-\frac{2\cdot\cos(2\cdot x)}{3\cdot\pi}+\frac{\sin(x)}{2}+\frac{1}{\pi}\to ff(x)$	*Done*

©Allez cochez la fonction f2 (x)=ff(x) sur la page suivante pour valider le résultat.


2
y
f1(x)=g(x)
1
-5·π
π
5·π
x
f2(x)=ff(x)
-1