Annexe D: Les nombres complexes

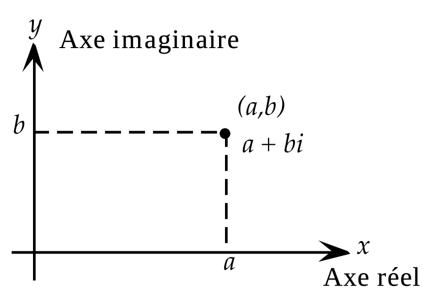
L'équation $t^2 + 1 = 0$ *n'a pas de solution dans les nombres réels. Pourtant, vous verrez lors de vos études qu'il est très pratique de pouvoir résoudre des équations de ce type. Nous y arrivons en introduisant un nouveau nombre que nous notons* i *et qui a la propriété suivante :* $i^2 = -1$*, donc* $i = \sqrt{-1}$. *Ce nouveau nombre, combiné aux nombres réels, est la base des nombres complexes. L'apparition de ces nombres a permis de simplifier la résolution de plusieurs problèmes physiques. En particulier, l'électronique et le génie électrique utilisent de façon intensive les nombres complexes.*

FORME RECTANGULAIRE

Un **nombre complexe** est un nombre de la forme

$$a + bi$$

où a et b sont des nombres réels et i est le nombre **imaginaire unité**; c'est-à-dire $i = \sqrt{-1}$. La figure suivante nous montre un nombre complexe $a + bi$ dessiné dans le **plan complexe**.



Plan complexe

Lorsque l'on fait correspondre des nombres complexes à des points dans un système de coordonnées rectangulaires, l'axe des x devient l'**axe réel** et l'axe des y devient l'**axe imaginaire**. Le nombre complexe $a + bi$ est exprimé sous **forme rectangulaire**, a étant la partie réelle et b la partie imaginaire du nombre complexe.

En électricité, on utilise j pour désigner l'unité imaginaire; donc $z = a + jb$. On évite ainsi la confusion avec i = le courant électrique.

On peut rappeler les principales propriétés des nombres complexes :

Soit $z_1 = a + bi$ et $z_2 = c + di$, où a, b, c, d $\mathbb{R}$.

1- $z_1 = z_2$ si et seulement si $a = c$ et $b = d$; on doit donc avoir égalité des parties réelles et des parties complexes.

2- $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$

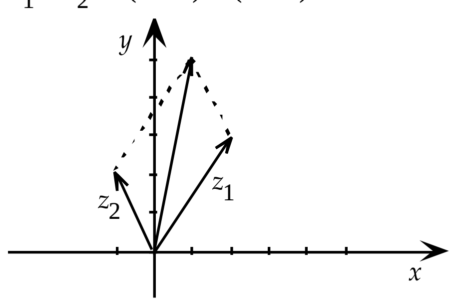
3- $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$

4- $z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$

On remarque qu'on peut associer à tout nombre complexe, un point du plan complexe. On pourrait également associer à tout nombre complexe un vecteur partant de l'origine et pointant sur les coordonnées (a,b). À ce moment, l'addition et la soustraction de nombres complexes peut être vue comme l'addition et la soustraction de vecteurs.

Exemple D.1 Soit $z_1 = 2 + 3i$ et $z_2 = -1 + 2i$

a) $z_1 + z_2 = (2 - 1) + (3 + 2)i = 1 + 5i$

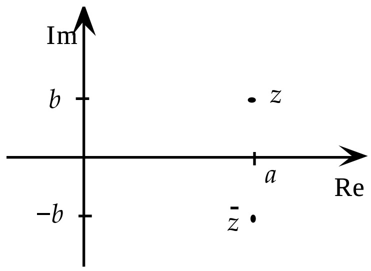


b)
$$\begin{aligned} z_1 \; z_2 &= (2 + 3i)(-1 + 2i) \\ &= -2 + 4i - 3i + 6i^2 \\ &= (-2 - 6) + (4 - 3)i \\ &= -8 + i \end{aligned}$$

Remarque : Il sera plus facile de comprendre géométriquement la multiplication de nombres complexes lorsque nous verrons la forme polaire.

Le conjugué d'un nombre complexe $z = a + bi$, que nous noterons $\bar{z}$, sera défini comme suit : $\bar{z} = a - bi$. On rencontre également la notation z^* pour désigner le conjugué.

Géométriquement, il s'agit d'une réflexion par rapport à l'axe réel:



On peut voir que $z\,\bar{z}$ représente toujours un nombre réel. En effet, si $z = a + bi$, alors

$$z\,\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 .$$

Cette dernière remarque nous permet d'aborder les notions d'inverse d'un nombre complexe et celle de la division de deux nombres complexes.

Si $z = a + bi$, alors $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{z}\dfrac{\bar{z}}{\bar{z}} = \dfrac{1}{a + bi}\,\dfrac{a - bi}{a - bi} = \dfrac{a - bi}{a^2 + b^2} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - \left(\dfrac{b}{a^2 + b^2}\right)i$

De plus, si on veut diviser deux nombres complexes, on n'a qu'à multiplier le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur comme on vient de le faire.

Exemple D.2 a) Soit $z = -2 - 3i$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{-2 - 3i} = \frac{1}{-2 - 3i}\,\frac{-2 + 3i}{-2 + 3i}$$

$$= \frac{-2 + 3i}{4 + 9} = \frac{-2}{13} + \frac{3}{13}\,i$$

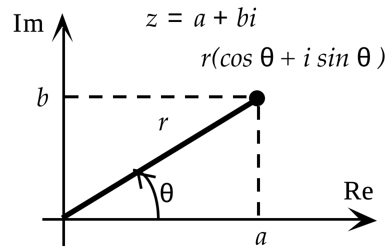
b) $$\frac{2 - 3i}{4 - i} = \frac{2 - 3i}{4 - i}\,\frac{4 + i}{4 + i} = \frac{8 + 2i - 12i + 3}{16 + 1}$$

$$= \frac{11 - 10i}{17} = \frac{11}{17} - \frac{10}{17}\,i$$

Dans ce qui précède, on constate qu'il est très facile d'additionner des nombres complexes en forme rectangulaire, mais le travail est plus ardu quand il s'agit de multiplier ou de diviser. De plus, imaginez qu'on ait à évaluer, par exemple, $(3 - 2i)^5$. Ce calcul serait très fastidieux sous forme rectangulaire. Voici maintenant une autre façon de représenter les nombres complexes.

FORME POLAIRE

Les nombres complexes peuvent s'exprimer sous **forme polaire** (ou **forme trigonométrique**) avec les relations $a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$, comme on le voit sur la figure suivante:



Lien entre formes rectangulaire et polaire

Donc $z = a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Puisque les fonctions sinus et cosinus sont périodiques, un nombre complexe $a + bi$ s'écrit sous la **forme polaire générale** de la façon suivante:

$$\begin{aligned} z = a + bi &= r\,[\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi)] \\ &= r\,\mathrm{cis}\,(\theta + 2k\pi),\ \ k \text{ un entier} \end{aligned}$$

où la notation $\mathrm{cis}(\alpha)$ est utilisée pour représenter $\mathrm{cis}\,\alpha = \cos\alpha + i\sin\alpha$

et le quadrant de θ est déterminé par a et b.

θ peut être exprimé en degrés ou en radians, au choix.

Le nombre r est appelé le **module**, ou la **valeur absolue**, de z et est noté **mod *z*** ou **|*z*|**. L'angle formé par la droite joignant z à l'origine et l'axe réel positif est appelé l'**argument** de z et est noté **arg *z***. En se référant à la figure précédente, on obtient les représentations suivantes pour le module et l'argument de $z = a + bi$:

$$\mathrm{mod}\, z = |z| = r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \text{(le module n'est jamais négatif)}$$

$$\arg z = \theta \qquad \text{où } \sin\theta = b/r \text{ et } \cos\theta = a/r.$$

Donc on déduit que $\mathrm{tg}\,\theta = b/a$, ce qui nous amène à $\theta = \mathrm{arctg}(b/a)$. Il faut cependant être prudent car $\mathrm{tg}\,\theta$ a une période de π et la fonction $\mathrm{arctg}(x)$ donne une valeur entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ en radians (–90˚ et 90˚). On doit donc tenir compte des signes des coefficients a et b.

Certains auteurs estiment que l'on doit prendre pour θ la plus petite valeur positive satisfaisant nos équations; ce qui signifie que θ sera entre 0 et 2π radians, ou entre 0˚ et 360˚. D'autres auteurs acceptent de travailler avec des angles négatifs; cela signifie que θ sera entre –π et π radians, ou entre –180˚ et 180˚. L'important est finalement de bien visualiser ces représentations et de comprendre les équivalences.

Exemple D.3

a) $5\left(\cos {}^{5\pi}/_{4} + i\sin {}^{5\pi}/_{4}\right) = 5\text{cis } {}^{5\pi}/_{4} = 5\text{cis}\left({}^{-3\pi}/_{4}\right)$
car ${}^{5\pi}/_{4} - 2\pi = {}^{-3\pi}/_{4}$

b) $2\text{cis } {}^{13\pi}/_{6} = 2\text{cis } {}^{\pi}/_{6}$
car $\dfrac{13\pi}{6} = \dfrac{12\pi}{6} + \dfrac{\pi}{6} = 2\pi + \dfrac{\pi}{6}$

c) $\sqrt{2}\ \text{cis}(-120^\circ) = \sqrt{2}\ \text{cis}(240^\circ)$
car $-120^\circ + 360^\circ = 240^\circ$

Exemple D.4 Traduisons les nombres complexes suivants sous forme rectangulaire.

a) $2 + 3i$
$r = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$
$\theta = \text{arctg}\left({}^{3}/_{2}\right) = 56{,}3^\circ$
donc $2 + 3i = \sqrt{13}\ \text{cis}56{,}3^\circ$

En électricité, on écrirait $\sqrt{13}\ \underline{/\ 56{,}3^\circ}$

b) $4 - i$
$r = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$
$\theta = \text{arctg}\left({}^{-1}/_{4}\right) = -14^\circ$
donc $2 + 3i = \sqrt{17}\ \text{cis}(-14^\circ)$

c) $-1 - i$
$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
$\theta = \text{arctg}\left({}^{-1}/_{-1}\right) = \text{arctg}(1) = 45^\circ$ ou ${}^{\pi}/_{4}$

mais comme les parties réelle et imaginaire sont négatives, on doit corriger θ pour tenir compte du fait qu'on est dans le 3^{e} quadrant.

Donc $\theta = 45^\circ + 180^\circ = 225^\circ$ (ou ${}^{5\pi}/_{4}$)
Et $-1 - i = \sqrt{2}\ \text{cis}(225^\circ) = \sqrt{2}\ \text{cis}\left({}^{5\pi}/_{4}\right)$
ou $-1 - i = \sqrt{2}\ \text{cis}(-135^\circ) = \sqrt{2}\ \text{cis}\left({}^{-3\pi}/_{4}\right)$

d) $1 - \sqrt{3}i$

$r = \sqrt{1+3} = 2$

$\theta = \text{arctg}\left(-\sqrt{3}/1\right) = -60^\circ$ ou $-\pi/3$

$1 - \sqrt{3}\, i = 2\text{cis}\left(-\pi/3\right)$

$1 - \sqrt{3}\, i = 2\text{cis}\left(5\pi/3\right)$ si on veut θ positif.

e) $-1 + \sqrt{3}i$

$r = \sqrt{1+3} = 2$

$\theta = \text{arctg}\left(\sqrt{3}/-1\right) = -60^\circ$ ou $-\pi/3$

Mais $-1 + \sqrt{3}i$ est dans le 2e quadrant; θ doit donc être corrigé par

$\theta = -60^\circ + 180^\circ = 120^\circ$

$-1 + \sqrt{3}\, i = 2\text{cis}(120^\circ)$

f) $-6 = -6 + 0i$

donc le module $r = 6$

et l'angle $\theta = 180^\circ$ ou π rad

$-6 = 6\text{cis}(\pi)$

Les **produits** et les **quotients** de nombres complexes se calculent selon les formules:

Si $z_1 = r_1 \text{ cis } \theta_1$ et $z_2 = r_2 \text{ cis } \theta_2$, alors

1. $z_1 z_2 = \left(r_1 \text{ cis}\, \theta_1\right)\left(r_2 \text{ cis}\, \theta_2\right) = r_1 r_2 \text{ cis}\left(\theta_1 + \theta_2\right)$
2. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1 \text{ cis}\, \theta_1}{r_2 \text{ cis}\, \theta_2} = \dfrac{r_1}{r_2} \text{ cis}\left(\theta_1 - \theta_2\right)$

Ces calculs sont beaucoup plus simples en forme polaire qu'en forme rectangulaire.

Exemple D.5 Soit $z_1 = 2\text{cis}\left(\pi/4\right)$ et $z_2 = 5\text{cis}\left(3\pi/4\right)$

$z_1 \; z_2 = 10\text{cis}\left(4\pi/4\right) = 10\text{cis}(\pi)$

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2}{5} \text{cis}\left(\pi/4 - 3\pi/4\right) = \dfrac{2}{5} \text{cis}\left(-\pi/2\right)$

Si vous le désirez, vous pouvez vérifier ces calculs en forme rectangulaire :

$z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ et $z_2 = \dfrac{-5}{2}\sqrt{2} + \dfrac{5}{2}\sqrt{2}i$

On remarque également que le conjugué de $z = r \operatorname{cis} \theta$ sera $\bar{z} = r \operatorname{cis}(-\theta)$.

Puisque i s'écrit en forme polaire comme 1 cis(90˚), on remarque que, géométriquement , la multiplication d'un nombre complexe par i équivaut à une rotation anti-horaire de 90˚, alors que la division par i équivaut à une rotation de 90˚ dans le sens horaire.

$$z\ i = [r \operatorname{cis}\theta]\ [1 \operatorname{cis} 90^\circ] = r \operatorname{cis}(\theta + 90^\circ)$$
$$\frac{z}{i} = \frac{r \operatorname{cis}\theta}{1 \operatorname{cis} 90^\circ} = r \operatorname{cis}(\theta - 90^\circ)$$

Exemple D.6 Soit $z_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$ et $z_2 = \sqrt{3} + i$.

Utilisons la forme polaire pour calculer

a) $z_1 z_2$ b) z_1 / z_2 c) $(z_2)^5$ d) $\overline{z_1}$

Transformons d'abord z_1 et z_2 sous forme polaire :

pour z_1 on a

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

θ_1 est dans le 4e quadrant et $\operatorname{tg}(\theta_1) = \dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$; donc $\theta_1 = \dfrac{5\pi}{3}$

d'où $z_1 = \operatorname{cis} 5\pi/3$

pour z_2 on a

$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = 2$

$\theta_2 = \pi/6$

d'où $z_2 = 2 \operatorname{cis} \pi/6$

a) On a : $z_1\ z_2 = (\operatorname{cis} 5\pi/3)\ \ (2 \operatorname{cis} \pi/6) = 2 \operatorname{cis} (5\pi/3 + \pi/6) = 2 \operatorname{cis} (11\pi/6)$
$= 2 (\cos (11\pi/6) + \sin (11\pi/6)\, i) = 2 (\sqrt{3}/2 - 1/2\, i) = \sqrt{3} - i.$

b) On a : $z_1 / z_2 = (\operatorname{cis} 5\pi/3)\ /(2 \operatorname{cis} \pi/6) = \frac{1}{2} \operatorname{cis} (5\pi/3 - \pi/6) = \frac{1}{2} \operatorname{cis} (3\pi/2)$
$= \frac{1}{2} (\cos (3\pi/2) + \sin (3\pi/2)\, i) = \frac{1}{2} (0 - 1\, i) = -\frac{i}{2}.$

c) On a : $(z_2)^5 = (2 \operatorname{cis} \pi/6)^5 = 2^5 \operatorname{cis}(5\ \pi/6) = 32\ (\cos (5\pi/6) + \sin (5\ \pi/6)\ i\ )$
$= 32\ (-\sqrt{3}/2 + 1/2\, i\ ) = -16\sqrt{3} + 16\, i.$

d) On a : $\overline{z_1} = cis\left(-5\pi/3\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

LE THÉORÈME DE DE MOIVRE

Cette section est consacrée au fameux théorème de De Moivre et au théorème de la $n^{\text{ème}}$ racine qui en découle. Ces théorèmes permettent de trouver aisément la puissance entière et la $n^{\text{ème}}$ racine d'un nombre complexe. Le **théorème de De Moivre** s'énonce comme suit:

Si $z = r \text{ cis } \theta$ et si n est un entier alors on a

$$z^n = (a + ib)^n = (r \text{ cis } \theta)^n = r^n \text{ cis}(n\theta)$$

On peut déduire de ce théorème le **théorème de la $n^{\text{ème}}$ racine**:

Si n est un entier positif supérieur à 1,

$$r^{1/n} \text{ cis}\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{360^\circ}{n}\right), \quad k = 0, 1, \cdots, n-1$$

sont les seules et uniques racines $n^{\text{èmes}}$ de $r \text{ cis } \theta$.

Exemple D.7

a) Soit $z = \sqrt{2}\,\text{cis}(120^\circ)$

$$\begin{aligned} z^5 &= \left(\sqrt{2}\right)^5 \text{cis}(5 \cdot 120^\circ) \\ &= 4\sqrt{2}\,\text{cis}(600^\circ) \\ &= 4\sqrt{2}\,\text{cis}(240^\circ) \text{ ou } = 4\sqrt{2}\,\text{cis}(-120^\circ) \end{aligned}$$

b) Soit $z = 8\text{cis}(120^\circ)$

$$\begin{aligned} z^{1/3} &= 8^{1/3}\,\text{cis}\left(\frac{120^\circ}{3} + k\frac{360^\circ}{3}\right), \ k = 0,\ 1,\ 2 \\ &= 2\text{cis}(40^\circ + k120^\circ), \ k = 0,\ 1,\ 2 \end{aligned}$$

On aura 3 solutions : $z_1 = 2\text{cis}(40^\circ)$

$z_2 = 2\text{cis}(160^\circ)$

$z_3 = 2\text{cis}(280^\circ)$

c) Trouvez les 4 racines complexes de $z^4 = 16$.

$z = 2$ est évidemment une solution.

Chaque solution diffère par un angle de $\dfrac{360^\circ}{4} = 90^\circ$;

on aura donc $z_1 = 2 = 2\text{cis}(0)$

$z_2 = 2\text{cis}(90°) = 2i$

$z_3 = 2\text{cis}(180°) = -2$

$z_4 = 2\text{cis}(270°) = -2i$

d) Résolvez $z^2 = i = 1\text{cis}(90°)$.

On aura les solutions $1^{1/2}\,\text{cis}\left(\frac{90°}{2} + k\frac{360°}{2}\right)$, avec $k = 0\,,1$

Alors $z_1 = \text{cis}(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$z_2 = \text{cis}(225°) = \frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

LA FORMULE D'EULER

Lorsqu'on multiplie des puissances, on doit additionner des exposants. Lorsqu'on multiplie des nombres complexes, on doit additionner les arguments (les angles). Avec cette analogie en tête, on définit la **formule d'Euler** de la façon suivante :

$$\text{cis}\,\theta = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

et, de façon plus générale, tout nombre complexe $z = r\,\text{cis}\,\theta$ peut s'écrire sous la forme $z = re^{i\theta}$.

On peut déduire cette formule de plusieurs façons, mais toujours en utilisant des notions de calcul différentiel et intégral. En admettant que i se comporte comme un nombre réel lorsque l'on prend la dérivée :

$$\frac{d}{d\theta}e^{i\theta} = ie^{i\theta} \qquad \text{et} \qquad \frac{d}{d\theta}\left[\cos\theta + i\sin\theta\right] = -\sin\theta + i\cos\theta$$

mais $-\sin\theta + i\cos\theta = i\left[\cos\theta + i\sin\theta\right]$

donc $ie^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

et $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

On considère ici que θ est exprimé en radians. Avec cette nouvelle notation et en se souvenant des propriétés des fonctions exponentielles, on retrouve les propriétés mentionnées plus haut dans le texte.

Par exemple, la multiplication de deux nombres complexes devient :

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \quad \text{et} \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$

$$z_1 \, z_2 = r_1 r_2 \, e^{i\theta_1 + i\theta_2}$$

$$= r_1 r_2 \, e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = r_1 r_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$$

De même si $z = r e^{i\theta}$, alors $z^n = r^n e^{i n\theta}$

Le conjugué de $z = r e^{i\theta}$ sera $\bar{z} = r e^{-i\theta}$

On peut déduire de la définition de la formule d'Euler et de la remarque précédente les formules suivantes :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Exemple D.8 a) $3\operatorname{cis}(60^\circ) = 3\operatorname{cis}\left(\pi/3\right) = 3\, e^{i\pi/3}$

b) $e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$

c) Si $z = 2e^{i\pi/5}$,

alors $-z = (-1)(z) = e^{i\pi} \; 2e^{i\pi/5} = 2\, e^{i6\pi/5}$

Considérons l'expression $e^{i\omega t}$ où t est une variable réelle et ω est une constante réelle :

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$$

On peut conclure que $\cos(\omega t) = \operatorname{Re}\left(e^{i\omega t}\right)$ = la partie réelle de $e^{i\omega t}$, et $\sin(\omega t) = \operatorname{Im}\left(e^{i\omega t}\right)$ = la partie imaginaire de $e^{i\omega t}$.

Certains calculs peuvent être plus faciles à effectuer à l'aide des fonctions exponentielles plutôt qu'avec des fonctions trigonométriques. En électricité, on utilise couramment cette technique.

Prenons la fonction $v = \cos(\omega t + \theta)$. Ici, ωt et θ doivent être en radians. Par contre, on rencontre souvent l'abus suivant : $v = 12\cos(10t + 30^\circ)$. L'utilisation de l'expression 30° est pratique pour visualiser l'angle de phase mais si on devait évaluer v, on utiliserait $v = 12\cos\left(10t + \pi/6\right)$. À ce moment, on pourrait écrire v de la façon suivante : $v = 12\operatorname{Re}\left\{ e^{j\left(10t + \pi/6\right)} \right\}$.

Un dernier mot au sujet des calculatrices. De plus en plus, les modèles plus avancés des calculatrices scientifiques permettent de travailler avec des nombres complexes et retournent des nombres complexes comme valeurs résultant de certains calculs. Par exemple, $(-8)^{1/3}$ correspond à la racine cubique de –8 et devrait donner –2 (en mode réel). Pourtant, certaines calculatrices donnent le résultat suivant : (1 , 1.732), ce qui vaut 2 cis(60˚) et qui correspond donc à la première des trois racines de $z^3 = -8$. Si vous voulez avoir la valeur –2 comme réponse, vous devez utiliser la fonction $\sqrt[a]{\ }$ avec $a = 3$. Ne soyez donc pas étonné si votre calculatrice vous donne (0 , 2) comme réponse au calcul $(-4)^{1/2}$ au lieu de vous indiquer qu'il y a une erreur : c'est qu'elle accepte les nombres complexes.

En général, les calculatrices affichent le couple (a , b) pour représenter le nombre $a + bi$. Les mêmes remarques sont vraies pour plusieurs fonctions qu'on retrouve sur ces calculatrices. Par exemple, on dit souvent que ln(x) n'est pas défini pour x négatif, ou que arcsin(x) n'est pas défini si $x > 1$. Cela est vrai si on se restreint aux fonctions à valeurs réelles (de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$). Mais si on accepte de travailler avec les nombres complexes, les limites précédentes ne sont plus nécessairement valides.

La leçon à retenir est d'être attentif lorsque votre calculatrice vous retourne un couple de nombres réels comme réponse à un calcul : c'est un nombre complexe.

EXERCICES

1. Soit $A = 2 + 5i$, $B = -3 + i$ et $C = 2i$.

Effectuez les calculs suivants en coordonnées rectangulaires.

a) $A - B$, $A + B + C$, $B - 2A$

b) $A\ B$, B/C, $\bar{B}\ C$, B/A

2. Situez sur le plan complexe, A = -3 + 4i et B = 5 cis 60°.

3. Dans le plan complexe, situez A = 5 cis 30°, B = 10 cis (3π/2), C = 7 cis (3π/4).

4. Traduisez $2\ cis(-\pi / 6)$ sous forme rectangulaire.

5. Traduisez $z = -1 + i\sqrt{3}$ sous forme polaire.

6. Traduisez les nombres complexes suivants sous forme polaire (avec $r \geq 0$ et $-180° < \theta < 180°$)

$$z_1 = -1 + i\,,\ \ z_2 = -1 - i\sqrt{3}\,,\ \ z_3 = 5\,.$$

7. Traduisez les nombres complexes suivants sous forme rectangulaire :

$z_1 = \sqrt{2}\ \ cis\ (\pi/4),\ z_2 = 3\ \ cis\ 210°,\ z_3 = 2\ \ cis\ (-2\pi/3).$

8. a) Traduisez sous forme polaire $1 - i\sqrt{3}$, $r \geq 0,\ 0° \leq \theta < 360°$.

b) Traduisez sous forme rectangulaire 4 cis 330˚.

9. Traduisez sous forme polaire le nombre complexe –3,18 + 4,19i de telle sorte que $r \geq 0,\ -180° < \theta < 180°$.

10. Traduisez sous forme rectangulaire le nombre complexe 7,63 cis (–162,27°).

11. Soit $z_1 = 8\ \ cis\ \ 25°\ \ et\ \ z_2 = 4\ \ cis\ \ 19°$, trouvez a) $z_1 z_2$ b) z_1 / z_2.

Laissez vos solutions sous forme polaire.

12. Évaluez $(2\ \ cis\ \ 10°)^3$. Donnez la solution sous la forme $a + bi$.

13. Évaluez $(2 \text{ cis } 15°)^4$. Donnez votre solution sous la forme $a + bi$.

14. Montrez que 4 cis 15° est une racine cubique de $8\sqrt{3} + 8i$.

15. En utilisant le théorème de De Moivre, évaluez $\left[-\frac{1}{2} - \left(\sqrt{3}\ /\ 2\right)i\right]^3$.

Donnez votre solution sous la forme $a + bi$.

16. Trouvez toutes les racines cubiques de i, donnez vos solutions sous la forme $a + bi$ et situez celles-ci sur un cercle dans le plan complexe.

17. Trouvez toutes les racines cubiques de $-4\sqrt{3} + 4i$. Laissez vos solutions sous forme polaire.

18. Écrivez $(1 - i\sqrt{3})^6$ sous la forme a+bi (utilisez le théorème de De Moivre)

19. Trouvez toutes les solutions de l'équation $x^6 + 1 = 0$. Situez les racines dans le plan complexe.

20. Trouvez toutes les solutions de l'équation $x^8 - 1 = 0$. Donnez celles-ci sous la forme $a + bi$.

21. Écrivez les nombres complexes suivants sous la forme exponentielle :

a) $3\sqrt{3} + 3i$

b) $4\text{cis}(120^\circ)$

c) $5 + 7i$

d) $2\cos\left(\pi/4\right) + 2i\sin\left(\pi/4\right)$

22. Écrivez sous forme rectangulaire $(a + bi)$.

a) $3e^{i\pi/3}$

b) $4e^{i5\pi/3}$

c) $e^{i\pi/2}$

d) e^{3i}

e) $\dfrac{e^{2\pi i}}{e^{\pi i}}$

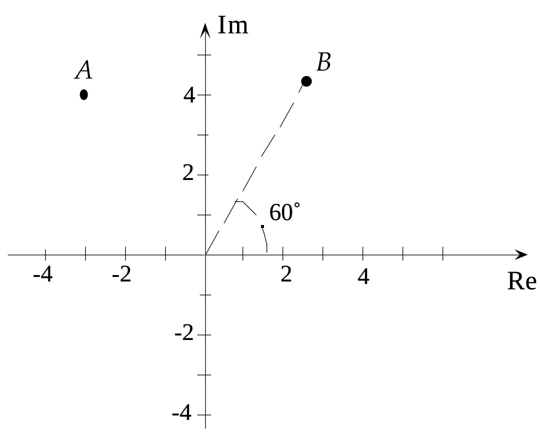
23. Traduisez $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^{-4}$ sous la forme $a + bi$. (Utilisez le théorème de De Moivre.)

RÉPONSES

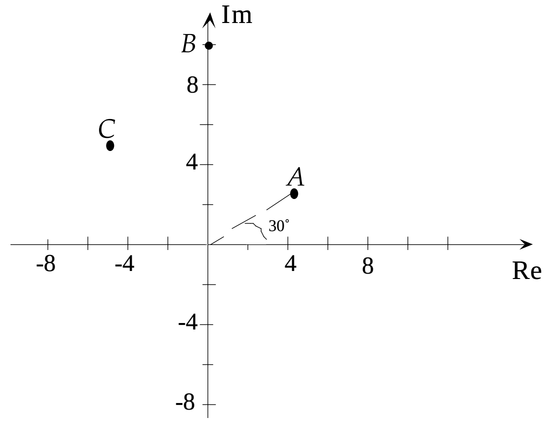
1. a) $A - B = 5 + 4i$ $\quad A + B + C = -1 + 8i$ $\quad B - 2A = -7 - 9i$

b) $A\ B = -11 - 13i$ $\quad B/C = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i$ $\quad \bar{B}\ C = 2 - 6i$ $\quad B/A = \dfrac{-1}{29} + \dfrac{17}{29}i$

2.



3.



4. $\sqrt{3} - i$

5. $z = 2\,cis\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

6. $z_1 = \sqrt{2}\ cis\ 135°,\ \ z_2 = 2\ \ cis(-120°),$

$z_3 = 5\ \ cis\ \ 0°$

7. $z_1 = 1 + i,\ \ z_2 = \frac{-3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i,\ \ z_3 = -1 - i\sqrt{3}$

8. a) $2\ \ cis\ \ 300°$

b) $2\sqrt{3} - 2i$

9. $5{,}26\ \ cis\ \ 127{,}20°$

10. $-7{,}27 - 2{,}32i$

11. a) $32\ \ cis\ \ 44°$ b) $2\ \ cis\ \ 6°$

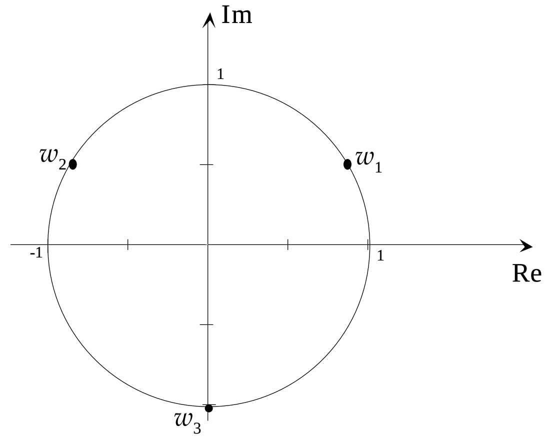
12. $4\sqrt{3} + 4i$

13. $8 + i8\sqrt{3}$

14. $(4\ \ cis\ \ 15°)^2 = 16\ \ cis\ \ 30° = 8\sqrt{3} + 8i$

15. 1 *ou* $1+0i$

16. $w_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i,\ w_2=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i,\ w_3=-i$



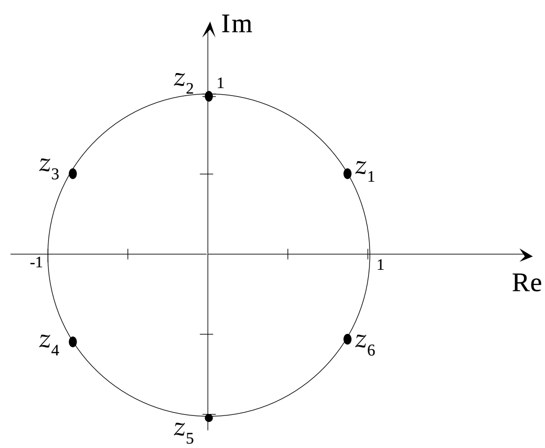
17. $w_1=2\ cis\ 50°,\ w_2=2\ cis\ 170°,$

$w_3=2\ cis\ 290°$

18. $64=64+0i$

19. $z_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1}{2},\ z_2=i,\qquad z_3=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1}{2},\ z_4=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-i\dfrac{1}{2},$

$z_5=-i,\ z_6=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-i\dfrac{1}{2}$



20. $cis\ 0° = 1,\ cis\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},\ cis\ 90° = i,\ cis\ 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},$

$cis\ 180° = -1,\ cis\ 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2},\ cis\ 270° = -i,\ cis\ 315° = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

21. a) $6e^{i\pi/6}$ b) $4e^{i\,2\pi/3}$

c) $\sqrt{74}\,e^{0{,}951\,i}$ d) $2e^{i\pi/4}$

22. a) $\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ b) $2 - 2\sqrt{3}\,i$

c) i d) $-0{,}98999 + 0{,}14112\,i$

e) -1

23. $-\frac{1}{32} + i\frac{\sqrt{3}}{32}$