

Calcul différentiel et intégral



Limites.....	27-2
Limite en un point fini.....	27-2
Limite à droite ou à gauche.....	27-2
Limite à l'infini.....	27-2
Utilisation de conditions.....	27-2
Dérivation.....	27-3
Fonction dérivée.....	27-3
Dérivée en un point.....	27-3
Dérivées d'ordre supérieur.....	27-3
Règles d'évaluation.....	27-4
Extrema.....	27-5
Syntaxe.....	27-5
Exemple.....	27-5
Recherche dans un intervalle spécifique.....	27-6
Intégration.....	27-7
Calcul de primitives.....	27-7
Calcul exact d'intégrales.....	27-8
Calculs approchés.....	27-8
Intégrales impropres.....	27-9
Calcul exact.....	27-9
Calcul approché.....	27-9
Quelques exemples utilisant l'intégration.....	27-10
Fonctions définies par une intégrale.....	27-10
Représentation graphique.....	27-10
Séries de Fourier.....	27-11
Séries de Taylor.....	27-12
Équations différentielles – fonction deSolve()	27-13
Équation du 1 ^{er} ordre.....	27-13
Équation du 2 nd ordre.....	27-14
Solution implicite.....	27-15
Fonctions de plusieurs variables.....	27-17
Dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables.....	27-17
Laplacien.....	27-17
Plan tangent.....	27-17
Intégrales multiples.....	27-18
Calcul d'intégrale double.....	27-18
Calcul d'intégrale triple.....	27-18

Ce chapitre présente les principales fonctions utilisables pour le calcul différentiel et intégral. La TI-89 / TI-92 Plus permet en particulier d'obtenir la valeur exacte d'une limite, d'une dérivée ou d'une intégrale, de résoudre des équations différentielles.

Au delà du bac, les utilisateurs pourront également effectuer des calculs de dérivées partielles, d'intégrales multiples ou encore des développements en série de Taylor.

Limites

La TI-89 / TI-92 Plus permet de déterminer la limite d'une fonction en un point. Cela est possible pour une limite en un point fini ou infini, on peut également étudier une limite à droite ou à gauche.

Limite en un point fini

Note. Vous pouvez taper `limit` en toutes lettres ou appuyer sur $\boxed{\text{F3}} \boxed{3}$.

Pour obtenir la limite de la fonction définie par l'expression *expr* quand la variable *var* tend vers le point *point*, on écrit :

$$\text{limit}(\text{expr}, \text{var}, \text{point})$$

```

■  $\frac{x^2 + x}{x^2 - 1} \rightarrow f(x)$  Done
■  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  1/2
  
```

Limite à droite ou à gauche

Pour obtenir une limite à gauche, la syntaxe est :

$$\text{limit}(\text{expr}, \text{var}, \text{point}, -1)$$

Pour obtenir une limite à droite, la syntaxe est :

$$\text{limit}(\text{expr}, \text{var}, \text{point}, 1)$$

```

■  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  undef
■  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  ∞
■  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  -∞
  
```

Limite à l'infini

Note. On n'écrit pas le signe + qui est réservé aux seules opérations d'addition sur la TI-89 / TI-92 Plus.

On peut aussi obtenir une limite en $+\infty$ ou en $-\infty$.

On obtient le symbole correspondant en appuyant sur

TI-89 : $\boxed{\blacklozenge} \boxed{[\infty]}$ TI-92 Plus : $\boxed{2\text{nd}} \boxed{[\infty]}$.

```

■  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 + x + 1}{(2 \cdot x + 1)^2 \cdot (x - 2)} \right)$  1/4
  
```

On écrit simplement ∞ pour une limite en $+\infty$.

Utilisation de conditions

Dans le cas de fonctions utilisant des paramètres, on peut préciser des conditions :

```

■  $\lim_{x \rightarrow \infty} (a^x)$  undef
■  $\lim_{x \rightarrow \infty} (a^x) \mid a > 1$  ∞
■  $\lim_{x \rightarrow \infty} (a^x) \mid a > 0 \text{ and } a < 1$  0
  
```

Restrictions

- Cette fonction ne permet pas d'étudier la limite d'une fonction définie en utilisant un **when**.
- Il est déconseillé de l'utiliser en mode APPROXIMATE.

Dérivation

La fonction $d()$ permet d'obtenir la dérivée d'une fonction. Il est également possible d'obtenir directement l'expression des dérivées d'ordre n quelconque.

Fonction dérivée

Pour obtenir la dérivée de la fonction définie par l'expression $expr$ par rapport à la variable var , on écrit $d(expr, var)$.

$d()$ s'obtient en appuyant sur les touches $\boxed{2nd} \boxed{d}$ (à ne pas confondre avec la touche alphabétique d).

```

■ d ( x^3 / (x+1)^2 )
d(x^3/(x+1)^2,x)
  
```

Le résultat obtenu est factorisé, ce qui facilite son utilisation (étude du signe par exemple...).

Dérivée en un point

Pour obtenir la dérivée en un point particulier, on peut utiliser la syntaxe suivante :

$$d(expr, var) | var = valeur$$

Il est également possible de mémoriser l'expression de la dérivée dans une fonction, puis de l'utiliser par la suite :

```

■ d ( tan(x) )
d(tan(x))
■ d ( tan(x) ) | x = pi/4
d(tan(x)) | x = pi/4
■ d ( tan(x) ) -> d(x)
d(tan(x)) -> d(x)
■ d ( pi/4 )
d(pi/4)
d(pi/4)
  
```

Mémorisation de la dérivée dans la fonction d .

Utilisation de la fonction d pour calculer la dérivée en un point particulier.

Il est possible dans certains cas d'obtenir la dérivée d'une fonction définie par morceaux à partir de la fonction **when**, mais le résultat obtenu risque d'être invalide aux bornes des intervalles utilisés pour cette définition.

```

■ d ( { x, x < 1
      { x^2, else }
      { 1, x < 1
      { 2*x, x > 1
      { undef, else, else }
d(when(x<1, x, x^2), x)
  
```

La fonction n'est pas dérivable pour $x=1$.

Dérivées d'ordre supérieur

Pour obtenir une dérivée d'ordre supérieur, on écrit :

$$d(expr, var, ordre)$$

En particulier, $d(expr, var, 2)$ permet d'obtenir la dérivée seconde de l'expression $expr$ par rapport à la variable var .

Dérivation (suite)

Exemple. Recherche des valeurs exactes des abscisses des points d'inflexion de la fonction $f: x \mapsto e^{-x^2}$

Important. Attention, il est indispensable d'utiliser les touches

TI-89 : \square [e^x]

TI-92 Plus : \square [e^x]

l'utilisation de la touche alphabétique e ne permet pas de définir la fonction exponentielle !

$e^{-x^2} \rightarrow f(x)$ Done
 $\frac{d^2}{dx^2}(f(x))$
 $(4 \cdot x^2 - 2) \cdot e^{-x^2}$
 $\text{solve}((4 \cdot x^2 - 2) \cdot e^{-x^2} = 0, \blacktriangleright)$
 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ or $x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$
 $\text{solve}(\text{ans}(1)=0, x)$

L'utilisation de $d(\text{expr}, \text{var}, \text{ordre})$ avec une valeur non entière de *ordre* conduit à une erreur.

Si *ordre* est négatif, on effectue un calcul de primitive.

$\frac{d^{-1}}{dx^{-1}}\left(\frac{1}{x} - x\right) \quad \ln(|x|) - \frac{x^2}{2}$
 $\frac{d^{-2}}{dx^{-2}}\left(\frac{1}{x} - x\right)$
 $x \cdot \ln(|x|) - \frac{x^3}{6} - x$

Règles d'évaluation

La fonction $d()$ n'applique pas les règles classiques d'évaluation et de simplification des arguments communes aux autres fonctions de la TI-89 / TI-92 Plus (voir chapitre 31). L'évaluation de $d(\text{expr}, \text{var})$ se fait de la façon suivante :

1. Simplification/évaluation du second argument jusqu'à ce que l'on obtienne un nom de variable *var1* dont la valeur n'est pas le nom d'une autre variable.
2. Simplification du premier argument, sans remplacer la valeur de la variable *var1* par sa valeur éventuelle.
3. Recherche de la dérivée symbolique de l'expression obtenue à l'étape 2 par rapport à *var1*.
4. Si *var1* possède une valeur, on remplace cette variable par sa valeur dans l'expression obtenue à l'étape 3. On procède de même si l'on utilise l'opérateur $|$ suivi de *var=valeur*.

$\text{DelVar } x$ Done
 $\frac{d}{dx}(x^2)$ 2 · x
 $5 \rightarrow x$ 5
 $\frac{d}{dx}(x^2)$ 10
 $y \rightarrow x$ y
 $\frac{d}{dx}(y \cdot x^2)$ 3 · y²
 $4 \rightarrow y$ 4
 $\frac{d}{dx}(y \cdot x^2)$ 48

On dérive par rapport à x , puis on remplace x par 5 dans le résultat.

On dérive en fait y^3 par rapport à y .

Ici, y est égal à 4. On calcule la dérivée, puis on remplace y par 4.

Extrema

Il est possible de rechercher l'abscisse d'un minimum ou d'un maximum en procédant par étapes : calcul de la dérivée, factorisation, recherche des racines ou directement en utilisant les fonctions intégrées **fMin** et **fMax**.

Syntaxe

Pour obtenir les valeurs des abscisses des maxima ou des minima d'une expression *expr*, fonction de la variable *var*, on utilise la syntaxe :

$$\mathbf{fMax}(expr, var)$$

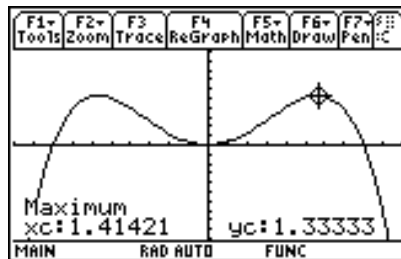
$$\mathbf{fMin}(expr, var)$$

Exemple

Recherche des abscisses des maxima de la fonction

$$f(x) = -\frac{x^4}{3} + \frac{4x^2}{3}$$

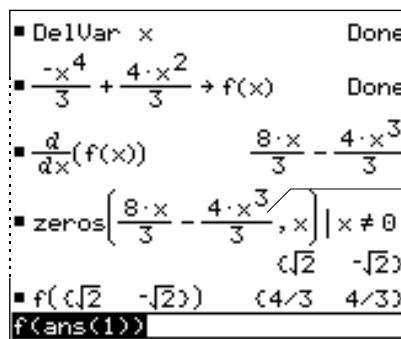
Étude graphique en utilisant $\boxed{F5}$ $\boxed{4}$ Maximum :



xmin=-2.5
xmax=2.5
xscl=.25
ymin=-2.5
ymax=2.5
yscl=.25
xres=2

On peut procéder en suivant les étapes classiques :

1. Calcul de la dérivée.
2. Recherche des racines de la dérivée.
3. Calculs des images des racines de la dérivée.



Utilisez $\boxed{2nd}$ \boxed{ANS} ou une sélection dans l'historique pour éviter de retaper cette expression.

Extrema (suite)

On peut aussi utiliser directement la fonction **fMax** :

```

■ fMax(f(x), x)
  x = -√2 or x = √2
    
```

Note. Vous trouverez cette fonction dans le catalogue des fonctions et instructions.

Note. Vous pouvez ensuite utiliser la fonction **exp►list** pour convertir le résultat obtenu en liste.

```

■ exp►list(x = -√2 or x = √2, ►)
  (√2 -√2)
    
```

Recherche dans un intervalle spécifique

Il est possible de préciser un intervalle de recherche en utilisant l'opérateur **|**.

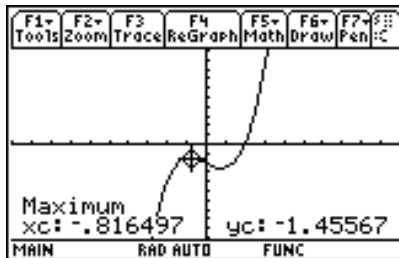
```

■ fMin(f(x), x)
  x = ∞ or x = -∞
■ fMin(f(x), x) | x > -1 and x ►
  x = 0
fMin(f(x), x) | x > -1 and x < 1
    
```

Voici un autre exemple utilisant la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^3}{2} - x - 2$$

Représentation graphique :



Recherche du maximum :

```

■ fMax(x^3/2 - x - 2, x)
  x = ∞
■ fMax(x^3/2 - x - 2, x) | x < 1
  x = -√6/3
    
```

Intégration

La TI-89 / TI-92 Plus permet le calcul direct de primitives ou d'intégrales d'une fonction.

Calcul de primitives

Pour obtenir une primitive d'une fonction, on écrit :

$$f(\text{expr}, \text{var})$$

On obtient \int (en appuyant sur $\boxed{2\text{nd}}$ $\boxed{[f]}$).

Souvent, l'expression obtenue ne pose pas de problème particulier :

Note. Lors de la dérivation et de l'intégration de fonctions trigonométriques, vérifiez que la TI-89 / TI-92 Plus se trouve bien en mode RADIAN.

$$\int (x \cdot (\cos(x))^2) dx$$

$$\frac{(\cos(x))^2}{4} + \frac{x \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)}{2}$$

$$\int (x \cdot \cos(x)^2, x)$$

Utilisez la touche ⏏ pour faire défiler le résultat.

Avec certaines fonctions, l'expression de la primitive obtenue va dépendre de l'intervalle d'étude :

$$\int \left(\frac{2 \cdot x - 3}{x} \right) dx$$

$$\int \left(\frac{2 \cdot x - 3}{x} \right) dx \mid x > 0 \quad 2 \cdot x - 3 \cdot \ln(|x|)$$

$$\int \left(\frac{2 \cdot x - 3}{x} \right) dx \mid x < 0 \quad 2 \cdot x - 3 \cdot \ln(x)$$

$$\int \left(\frac{2 \cdot x - 3}{x} \right) dx \mid x < 0 \quad 2 \cdot x - 3 \cdot \ln(-x)$$

$$\int ((2x-3)/x, x) \mid x < 0$$

Simplification pour $x > 0 \dots$

En utilisant la syntaxe

$$f(\text{expr}, \text{var}, \text{constante})$$

Il est possible d'ajouter une constante à l'expression obtenue :

$$\int \left(\frac{2 \cdot x - 3}{x} \right) dx$$

$$-3 \cdot \ln(|x|) + 2 \cdot x + 10$$

$$\int \left(\frac{2 \cdot x - 3}{x} \right) dx$$

$$-3 \cdot \ln(|x|) + 2 \cdot x + c$$

$$\int ((2x-3)/x, x, c)$$

Intégration (suite)

Calcul exact d'intégrales

Pour obtenir la valeur de l'intégrale d'une fonction sur un intervalle, on écrit :

$\int(\text{expr}, \text{var}, \text{borne1}, \text{borne2})$

$$\int_0^{\pi} (x \cdot (\cos(x))^3) dx \quad -14/9$$

$$\int_0^1 (x^2 \cdot e^{3 \cdot x}) dx \quad \frac{5 \cdot e^3}{27} - 2/27$$

$$\int_1^2 (x \cdot \ln(x+1)) dx \quad \frac{3 \cdot \ln(3)}{2} - 1/4$$

$\int(x \cdot \ln(x+1), x, 1, 2)$

Il est naturellement possible de calculer une intégrale dépendant de différents paramètres :

$$\int_0^{\pi/t} (\cos(t \cdot x) \cdot (x^2 + x + 1)) dx \quad \frac{-2 \cdot (t + \pi)}{t^3}$$

$\int(t \cdot x) \cdot (x^2 + x + 1), x, 0, \pi/t$

Remarque. La TI-89 / TI-92 Plus sait utiliser les propriétés liées à la parité d'une fonction, même si celle-ci n'a pas de primitive simple.

$$\int_{-a}^a \left(\frac{x^2}{\cos(x) + 2} \right) dx$$

$$2 \cdot \int_0^a \left(\frac{x^2}{\cos(x) + 2} \right) dx$$

$$\int_{-a}^a \left(\frac{x^3}{\cos(x) + 2} \right) dx \quad 0$$

$\int(x^3 / (\cos(x) + 2), x, -a, a)$

Intégration d'une fonction *paire* sur un intervalle du type $[-a, a]$.

Intégration d'une fonction *impaire* sur un intervalle du même type.

Calculs approchés

En cas d'échec dans la recherche d'une intégrale exacte, en mode AUTO la TI-89 / TI-92 Plus donnera une valeur approchée.

Note. Lorsque vous désirez seulement un calcul approché, vous pouvez aussi utiliser la fonction **nlnt** décrite dans l'annexe A.

$$\int_0^1 (e^{t^2} + t + 1) dt \quad 7.44787$$

$\int(e^{t^2} + t + 1), t, 0, 1$

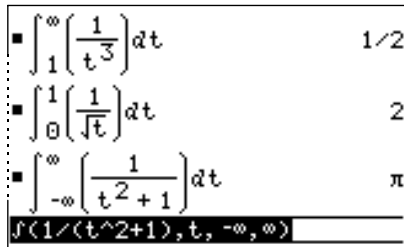
Intégrales impropres

Une intégrale impropre est une intégrale qui fait intervenir des bornes infinies, ou encore une fonction non définie aux bornes, ou en un point, de l'intervalle d'intégration.

La TI-89 / TI-92 Plus est également capable de fournir une réponse exacte ou approchée, ou encore d'indiquer que l'intégrale étudiée n'est pas définie.

Calcul exact

Quand il est possible de déterminer une primitive, et quand l'intégrale est convergente, on obtient une valeur exacte.



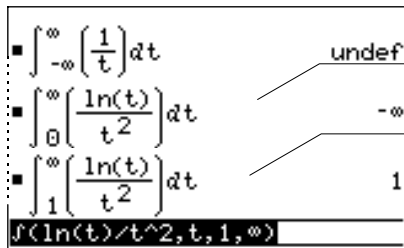
$$\int_1^{\infty} \left(\frac{1}{t^3} \right) dt \quad 1/2$$

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right) dt \quad 2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t^2+1} \right) dt \quad \pi$$

$f(1/(t^2+1), t, -\infty, \infty)$

Si l'intégrale ne converge pas sur l'intervalle étudié, on obtient le résultat **undef** ou un résultat infini.



$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t} \right) dt \quad \text{undef}$$

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\ln(t)}{t^2} \right) dt \quad -\infty$$

$$\int_1^{\infty} \left(\frac{\ln(t)}{t^2} \right) dt \quad 1$$

$f(\ln(t)/t^2, t, 1, \infty)$

Cette intégrale est divergente en 0.

Il n'y a pas de problème si on intègre sur un intervalle ne contenant pas ce point.

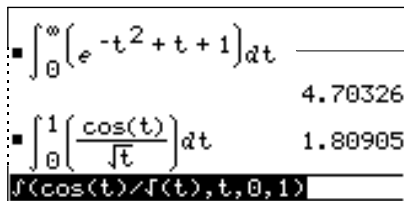
Calcul approché

Ici aussi, en cas d'échec dans la recherche d'une primitive exacte, la TI-89 / TI-92 Plus donnera une valeur approchée :

Note. Attention à l'écriture de la fonction exponentielle, il faut utiliser

TI-89 : $[e^x]$

TI-92 Plus : $[2nd][e^x]$.



$$\int_0^{\infty} \left(e^{-t^2} + t + 1 \right) dt \quad 4.70326$$

$$\int_0^1 \left(\frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} \right) dt \quad 1.80905$$

$f(\cos(t)/\sqrt{t}, t, 0, 1)$

Pas de primitive simple ici.

Dans certains cas, si l'algorithme de calcul numérique approché ne converge pas correctement, l'expression de départ est retournée.

Quelques exemples utilisant l'intégration

La TI-89 / TI-92 Plus permet de manipuler des fonctions définies par des intégrales.

Fonctions définies par une intégrale

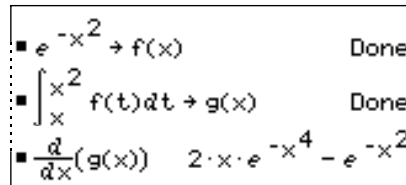
Note. Attention à l'écriture de la fonction exponentielle, il faut utiliser

TI-89 : $[e^x]$

TI-92 Plus : $[2nd][e^x]$.

Dérivée de la fonction définie par

$$g(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2} dt$$



Représentation graphique

Il est possible de représenter une fonction définie par

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt$$

Il suffit pour cela de placer l'expression

$$j(f(t), t, a(x), b(x))$$

comme définition de l'une des fonctions de l'écran **Y=**, ou d'utiliser directement la commande

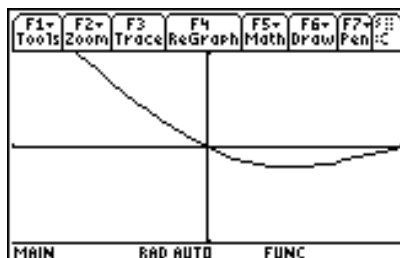
$$\text{Graph } j(f(t), t, a(x), b(x))$$

Conseils d'utilisation.

- Dans le cas où une primitive est connue, il est préférable de faire calculer l'expression de la fonction par la TI-89 / TI-92 Plus, puis de construire la courbe à partir de cette expression.
- Si aucune primitive n'est connue, les différentes valeurs devront être calculées numériquement par la TI-89 / TI-92 Plus. Le choix d'une valeur un peu plus élevée du paramètre **xres** (5 par exemple, au lieu de 2 qui est la valeur par défaut) permet d'accélérer la construction.

Exemple. Représentation graphique de la fonction précédente dans une fenêtre de tracé $[-1,1] \times [-1,1]$, avec **xres**=5.

$$\text{Graph } j(e^{-t^2}, t, x, x^2)$$



Séries de Fourier

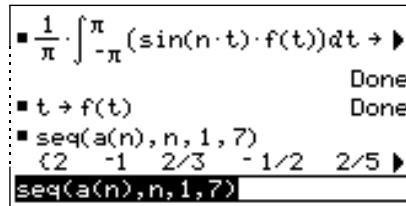
Calcul des coefficients de Fourier d'une fonction.

Soit f une fonction 2π périodique telle que $f(x) = x$ sur $]-\pi, \pi[$.

Suggestion. Avant d'effectuer cet exemple, vérifiez que votre calculatrice est bien en mode RADIAN.

Cette fonction est impaire, il suffit donc de calculer les coefficients des termes en $\sin(nx)$. Ceux-ci sont donnés par la relation

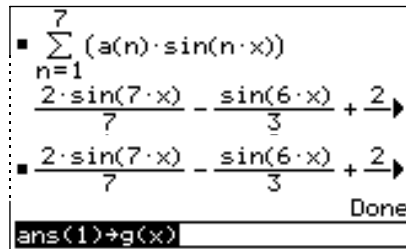
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt$$



Note. Vous pouvez taper le mot seq en toutes lettres ou appuyer sur $\boxed{2nd} \boxed{[MATH]} \boxed{3} \boxed{1}$.

On obtient ensuite une approximation de f en calculant

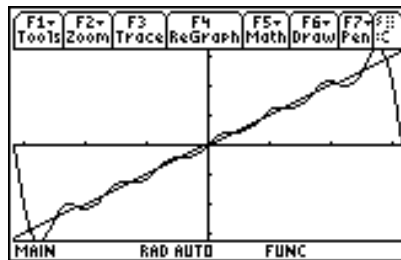
$$g(x) = \sum_{n=1}^N a_n \sin(nx)$$



Note. Pour obtenir l'écran ci-contre, tapez :

$\boxed{F3} \boxed{4} (a(n) * \sin(n * x), n, 1, 7)$
 \boxed{ENTER}
 $\boxed{2nd} \boxed{[ANS]} \boxed{STO} g(x) \boxed{ENTER}$

Représentation de f et de g :



On peut obtenir le graphique précédent en représentant :

$$y1 = f(x)$$

$$y2 = g(x)$$

dans une fenêtre graphique définie par :

$$x_{min} = -3.14, x_{max} = 3.14, y_{min} = -3.14, y_{max} = 3.14$$

Séries de Taylor

Pour terminer ce chapitre, nous allons voir comment obtenir la série de Taylor d'une fonction.

Pour une fonction n fois dérivable en un point a , la n -ième somme partielle de la série de Taylor est donnée par

$$S_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)(x-a)^i}{i!}$$

Il est possible d'obtenir directement cette somme en utilisant la fonction **taylor** sous la forme :

- **taylor**(*expr*, *var*, *ordre*), pour un développement en 0.
- **taylor**(*expr*, *var*, *ordre*, *point*) pour un développement en un point quelconque.

Voici quelques exemples de développements :

1. Développements en 0 :

Note. Pour les calculs symboliques utilisant les fonctions trigonométriques, vérifiez que la TI-89 / TI-92 Plus se trouve bien en mode RADIAN.

■ **taylor**(e^x , x , 5)
 $\frac{x^5}{120} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1$
 ■ **taylor**($\sin(x)$, x , 7)
 $\frac{-x^7}{5040} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{6} + x$
 ■ **taylor**($\cos(x)$, x , 7)
 $\frac{-x^6}{720} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{2} + 1$
taylor($\cos(x)$, x , 7)

2. Développement en un point autre que 0 :

Note. Attention à l'écriture de la fonction exponentielle, il faut utiliser
 TI-89 : $[e^x]$
 TI-92 Plus : $[2nd][e^x]$.

■ **taylor**($\frac{e^x + 1}{x}$, x , 2, 1)
 $\frac{e^2 \cdot (x-1)^2}{2} + e^2$

3. Utilisation de cette fonction pour la recherche d'un développement asymptotique à l'infini :

■ $\frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1} \rightarrow f(x)$ Done
 ■ **taylor**($f(\frac{1}{u})$, u , 5, 0) | $u = \frac{1}{x}$
 $\frac{-1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} + 1$
taylor($f(1/u)$, u , 5, 0) | $u = 1/x$

Équations différentielles – fonction deSolve()

La fonction **deSolve()** (**F3** C) vous permet de résoudre de façon symbolique de nombreuses équations différentielles ordinaires du 1^{er} et du 2nd ordre.

Équation du 1^{er} ordre

Note. Le symbole ' (**2nd** [']) est utilisé pour les dérivées uniquement avec la fonction **deSolve()**. Dans tous les autres cas, utilisez **d()**.

Pour déterminer la solution générale, utilisez la syntaxe suivante :

deSolve(ode1OrdreOu2Ordre, varIndépendante, varDépendante)

Exemple. Résolution de l'équation différentielle $x^2 y' - y = 1$

```
■ NewProb Done
■ deSolve(x^2·y' - y = 1, x, y)
y = @1·e-1/x - 1
deSolve(x^2*y'-y=1,x,y)
```

La solution générale d'une équation du 1^{er} ordre contient une constante arbitraire de la forme @k, où k est un entier compris entre 1 et 255. Cet entier est remis à 1 lorsque vous effacez l'écran par une instruction **ClrHome** ou **NewProb**.

Il est également possible de déterminer une solution vérifiant une condition initiale donnée.

Cherchons par exemple la solution telle que $y(1) = 0$:

On complète la ligne d'édition de façon à obtenir
`deSolve(x^2*y'-y=1 and y(1)=0,x,y)`

```
■ deSolve(x^2·y' - y = 1 and y(1)=0, x, y)
y = e1-1/x - 1
...ve(x^2*y'-y=1 and y(1)=0...
```

Il est possible de définir une fonction à partir de cette solution :

1. Appuyez sur **⊖** pour mettre la solution en surbrillance dans la zone de l'historique. Appuyez sur **ENTER** pour la coller automatiquement dans la ligne de saisie .
2. Insérez l'instruction **Define** au début de la ligne et insérez (x) dans la ligne d'édition pour obtenir
`Define y(x)=e^(1-1/x)-1`
puis appuyez sur **ENTER**.
3. Vous pouvez ensuite utiliser cette fonction.

Note. Appuyez sur **2nd** **Ⓞ** pour atteindre le début de la ligne de saisie.

```
■ Define y(x)=e1-1/x-1 Done
■ y(4) e3/4-1
```

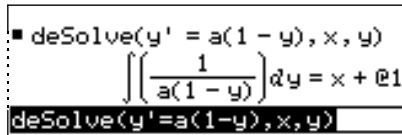
Équations différentielles – fonction deSolve() (suite)

Multiplications implicites

Comme dans d'autres domaines, l'utilisation de multiplications implicites peut provoquer une erreur d'interprétation de la part de la TI-89 / TI-92 Plus.

Rappelons que $x(x+1)$ provoque l'affichage d'un message d'erreur, mais que $a(x+1)$, par exemple, est interprété comme le résultat obtenu en appliquant la fonction a à l'expression $x+1$.

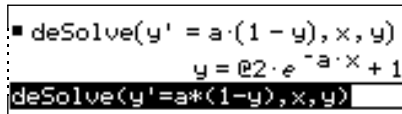
Réolvons par exemple l'équation $y' = a(1-y)$:



```
deSolve(y' = a(1-y), x, y)
∫ (1 / (a(1-y))) dy = x + @1
deSolve(y'=a(1-y), x, y)
```

On pourrait croire que la TI-89 / TI-92 Plus ne sait pas résoudre cette équation...

En fait, tout rentre dans l'ordre si on écrit le symbole * entre a et (1-y) :



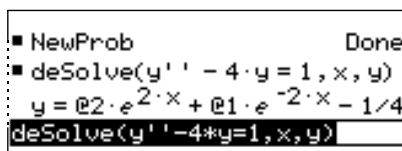
```
deSolve(y' = a*(1-y), x, y)
y = @2 * e^-a*x + 1
deSolve(y'=a*(1-y), x, y)
```

Équation du 2nd ordre

Vous pouvez également utiliser **deSolve()**, pour déterminer la solution générale, ou une solution particulière (en spécifiant deux conditions initiales) d'une équation différentielle du second ordre.

Voici par exemple la forme générale des solutions de l'équation $y'' - 4y = 1$:

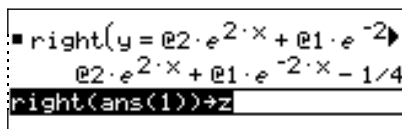
Note Tapez le symbole ' (2nd [']) deux fois pour la dérivée seconde.



```
NewProb Done
deSolve(y'' - 4*y = 1, x, y)
y = @2 * e^2*x + @1 * e^-2*x - 1/4
deSolve(y''-4*y=1, x, y)
```

On peut vérifier la validité de cette solution.

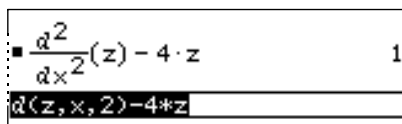
On commence par placer l'expression obtenue dans z :



```
right(y = @2 * e^2*x + @1 * e^-2*x - 1/4)
right(ans(1)) -> z
```

On peut à présent calculer $z'' - 4z$:

Note. Le symbole ' (2nd [']) est utilisé pour les dérivées uniquement avec la fonction **deSolve()**. Dans tous les autres cas, utilisez **d()**.



```
d^2/dx^2(z) - 4*z
d(z, x, 2) - 4*z
```

Ici aussi, il est possible de déterminer une solution vérifiant des conditions initiales. On a deux possibilités :

- Indiquer les valeurs de la fonction et de sa dérivée en un point.
- Indiquer les valeur de la fonction en deux points particuliers.

Note. La solution générale d'une équation du 2nd ordre contient deux constantes du type @k. La forme générale d'une solution peut différer de celle que vous pouvez obtenir par un calcul "à la main", cela peut provenir du choix des constantes.

Exemples

- Solution de $y'' - 4y = 1$ telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$:
deSolve(y''-4y=1 and y(0)=1 and y'(0)=2,x,y)

```

deSolve(y'' - 4·y = 1 and
y =  $\frac{9 \cdot e^{2 \cdot x}}{8} + \frac{e^{-2 \cdot x}}{8} - 1/4$ 
... y(0)=1 and y'(0)=2,x,y)

```

- Solution de $y'' - 4y = 1$ telle que $y(1) = 0$ et $y(-1) = 0$:
deSolve(y''-4y=1 and y(1)=0 and y(-1)=0,x,y)

```

deSolve(y'' - 4·y = 1 and
y =  $\frac{\cosh(2 \cdot x)}{4 \cdot \cosh(2)} - 1/4$ 
... y(1)=0 and y(-1)=0,x,y)

```

Note. L'expression de la solution fait intervenir

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Solution implicite

La fonction **deSolve()** peut donner un résultat sous forme implicite. La fonction **solve()** permet d'obtenir, dans certain cas, la solution sous forme explicite (voir exemple ci-dessous).

deSolve(y'=x*cos(y)^2,x,y)

```

deSolve(y' = x·(cos(y))^2, x)
tan(y) =  $\frac{x^2}{2} + @1$ 
solve(tan(y) =  $\frac{x^2}{2} + @1$ , y)
y =  $\tan^{-1}\left(\frac{x^2 + 2 \cdot @1}{2}\right) + @n1 \cdot \pi$ 
solve(ans(1),y)

```

@n1 représente un entier quelconque.

Dans certain cas la fonction **solve()** n'est d'aucun secours, lorsque la solution est donnée sous forme implicite.

On se propose de trouver la solution de l'équation différentielle :
 $\sin(y) = (y e^x + \cos(y))y'$ avec la condition initiale $y(0) = 0$.

1. On place l'équation à résoudre dans la variable ode.
 $\sin(y) = (y \cdot e^x + \cos(y)) \cdot y'$ [STO] ode

```

sin(y) = (y·e^x + cos(y))·y'
sin(y) = (e^x·y + cos(y))·y'
...=(y*e^(x)+cos(y))*y'→ode

```

Équations différentielles – fonction deSolve() (suite)

2. On résout cette équation, en indiquant la condition initiale.
La solution, exprimée sous forme implicite, est placée dans sol :
deSolve(ode and y(0)=0,x,y) $\boxed{\text{STO}} \text{ sol}$

```

deSolve(ode and y(0)=0, >
  -(2·sin(y)+y²) = -(eˣ - 1) >
... (ode and y(0)=0,x,y) → sol

```

Note. Le fait que la solution soit donnée explicitement ou sous forme implicite peut aussi dépendre du mode Complex Format en cours d'utilisation.

Essayez par exemple de résoudre $y'=y*(1-y)$

a) en mode Complex Format = Real.

b) en mode Complex Format = Rectangular.

(Sur la version disponible lors de l'écriture de ce manuel, on obtenait une solution explicite dans le premier cas, et implicite dans le second.)

Vous pouvez vérifier que la courbe passe bien par le point (0,0),

```

sol | x = 0 and y = 0 true
sol | x=0 and y=0

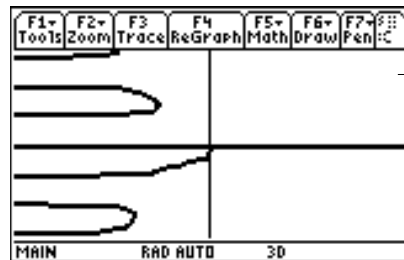
```

La fonction solve() ne permet pas d'obtenir la solution sous forme explicite, mais vous pouvez, à l'aide du mode IMPLICIT — voir chapitre 13 — avoir un aperçu de la représentation graphique.

```

solve(sol, y)
  2·sin(y) + y²·eˣ = 0
left(2·sin(y) + y²·eˣ = 0) >
Done
left(ans(1)) → z1(x,y)

```



Tracé obtenu en ZoomStd, suivi d'un zoom avant en appuyant sur la touche $\boxed{\times}$.

La formule de dérivation des fonctions implicites — sous réserve de vérification de sa validité — peut vous permettre de vérifier que la fonction définie par la relation est bien solution.

```

-d/dx(right(eq) - left(eq))
-d/dy(right(eq) - left(eq))
Done
...t(eq), y) → impdif(eq, x, y)
ode | y' = impdif(sol, x, y) true

```

Fonctions de plusieurs variables

La TI-89 / TI-92 Plus permet également de calculer les dérivées partielles de fonctions de plusieurs variables.

Dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables

Pour obtenir des dérivées partielles d'ordre 1, il suffit d'utiliser la fonction **d** en précisant la variable souhaitée. Pour obtenir une dérivée d'ordre supérieur par rapport à différentes variables, on pourra imbriquer plusieurs appels à la fonction de dérivation :

$d(d(expr, y), x)$ permet par exemple d'obtenir $\frac{\partial^2 expr}{\partial x \partial y}$.

$\frac{d}{dy}(x^3 + x \cdot y) \quad x$
 $\frac{d}{dx}(x^3 + x \cdot y) \quad 3 \cdot x^2 + y$
 $\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dy}(x^3 + x \cdot y)\right) \quad 1$
 $d(d(x^3+x \cdot y, x), y) \quad 1$

Laplacien

Exemple. Définition d'une fonction calculant le laplacien d'une expression e par rapport aux variables $v1$ et $v2$, et utilisation de cette fonction.

$\frac{d}{dy}\left(\frac{d}{dx}(x^3 + x \cdot y)\right) \quad 1$
 $\frac{d^2}{dv1^2}(e) + \frac{d^2}{dv2^2}(e) \rightarrow \text{lap}(e)$
 Done
 $\text{lap}(x^2 + x \cdot y^2, x, y) \quad 2 \cdot x + 2$
 $\text{lap}(e^{x \cdot y}, x, y) \quad (x^2 + y^2) \cdot e^{x \cdot y}$

Plan tangent

L'équation du plan tangent à une surface d'équation $z = f(x, y)$ au point $M(a, b)$ est donnée par

$$z = f(a, b) + (x - a) \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + (y - b) \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

La fonction **eq** définie par :

$$z = f(a, b) + d(f(a, b), a)(x - a) + d(f(a, b), b)(y - b) \rightarrow \text{eq}(a, b)$$

donne directement l'équation de ce plan au point $M(a, b)$.

Note. Cette fonction ne peut pas être utilisée si les variables x, y ou z ont une valeur.

$x^2 + y^2 \rightarrow f(x, y) \quad \text{Done}$
 $\text{eq}(1, 2) \quad z = 2 \cdot x + 4 \cdot y - 5$

Intégrales multiples

En imbriquant plusieurs appels à la fonction `f`, il est possible d'obtenir le calcul d'intégrales multiples.

Calcul d'intégrale double

Pour calculer l'intégrale double de la fonction f sur le domaine plan défini par

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\}$$

on utilise

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

On écrira donc `f(f(x,y), y, c(x), d(x)), x, a, b)`.

Calculons par exemple l'aire d'un disque de rayon r . On doit intégrer la fonction constante égale à 1 sur le domaine

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq r^2\}$$

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -r \leq x \leq r, -\sqrt{r^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}\}$$

On doit entrer l'expression :

$$f(f(1, y, -\sqrt{r^2 - x^2}, \sqrt{r^2 - x^2}), x, -r, r)$$

The screenshot shows a calculator interface with the following input and output:

$$\int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} 1 dy dx$$

The result shown is $\pi \cdot r \cdot |r|$. A note indicates that for a simplified result, $r > 0$ must be specified, leading to the final result $\pi \cdot r^2$.

Pour avoir un résultat simplifié, il faut préciser que r est positif.

Calcul d'intégrale triple

On utilise la même méthode pour un calcul d'intégrale triple. Voici par exemple le calcul de l'intégrale triple de la fonction

$$f(x, y, z) = x^2 y e^{xyz}$$

Sur le domaine

$$\Delta = [0, 1]^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

On doit entrer l'expression :

$$f(f(f(x^2 * y * e^{(x * y * z)}, z, 0, 1), y, 0, 1), x, 0, 1)$$

The screenshot shows a calculator interface with the following input and output:

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x^2 \cdot y \cdot e^{x \cdot y \cdot z}) dz dy dx$$

The result shown is $e - 5/2$.