Section 5.1

5.1-a) $F(s)=\int_0^\infty \left(t^2-1\right)\cdot e^{-st}\,dt=\dfrac{2-s^2}{s^3}$

b) $G(s)=\int_0^\infty t\cdot e^{-at}\cdot e^{-st}\,dt=\dfrac{1}{(s+a)^2}$

c) $H(s)=\int_0^\infty t\cdot\sin(\omega t)\cdot e^{-st}\,dt=\dfrac{2\omega s}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$

Calculs pour le numéro 5.1 :

$\int_0^\infty \left(e^{-s\cdot t}\cdot\left(t^2-1\right)\right)dt \mid s>0$	$\dfrac{-\left(s^2-2\right)}{s^3}$
$\int_0^\infty \left(t\cdot e^{-a\cdot t}\cdot e^{-s\cdot t}\right)dt \mid s>-a$	$\dfrac{1}{(s+a)^2}$
$\int_0^\infty \left(t\cdot\sin(w\cdot t)\cdot e^{-s\cdot t}\right)dt \mid s>0$	$\dfrac{2\cdot s\cdot w}{\left(s^2+w^2\right)^2}$

5.2-a) $F(s)=\int_0^3 2e^{-st}\,dt+\int_3^\infty (5-t)e^{-st}\,dt=\dfrac{2}{s}-\dfrac{e^{-3s}}{s^2}$

b) $G(s)=\int_0^4 (4-t)\cdot e^{-st}dt+\int_4^6 3e^{-st}\,dt+\int_6^\infty (9-t)\cdot e^{-st}\,dt=\dfrac{4}{s}-\dfrac{1}{s^2}+\left(\dfrac{3}{s}+\dfrac{1}{s^2}\right)\cdot e^{-4s}-\dfrac{e^{-6s}}{s^2}$

c) $F(s)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-st}\,dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \sin(t)\cdot e^{-st}\,dt=\dfrac{1}{s}+\left(\dfrac{s}{s^2+1}-\dfrac{1}{s}\right)\cdot e^{-\frac{\pi}{2}s}$

Calculs pour le numéro 5.2 :

$\int_0^3 \left(2\cdot e^{-s\cdot t}\right)dt+\int_3^\infty \left((5-t)\cdot e^{-s\cdot t}\right)dt \mid s>0$	$\dfrac{e^{-3\cdot s}\cdot\left(2\cdot s\cdot e^{3\cdot s}-1\right)}{s^2}$
$\text{propFrac}\left(\dfrac{e^{-3\cdot s}\cdot\left(2\cdot s\cdot e^{3\cdot s}-1\right)}{s^2}\right)$	$\dfrac{2}{s}-\dfrac{e^{-3\cdot s}}{s^2}$
$\text{propFrac}\left(\int_0^4 \left((4-t)\cdot e^{-s\cdot t}\right)dt+\int_4^6 \left(3\cdot e^{-s\cdot t}\right)dt+\int_6^\infty \left((9-t)\cdot e^{-s\cdot t}\right)dt \mid s>0\right)$	$\left(\dfrac{3}{s}+\dfrac{1}{s^2}\right)\cdot e^{-4\cdot s}-\dfrac{e^{-6\cdot s}}{s^2}+\dfrac{4}{s}-\dfrac{1}{s^2}$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-s\cdot t}\,dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \left(\sin(t)\cdot e^{-s\cdot t}\right)dt \mid s>0$	$\left(\dfrac{s}{s^2+1}-\dfrac{1}{s}\right)\cdot e^{\frac{-\pi\cdot s}{2}}+\dfrac{1}{s}$

5.3-a) $\mathscr{L}\{4-7t\}=4\mathscr{L}\{1\}-7\mathscr{L}\{t\}=4\dfrac{1}{s}-7\dfrac{1}{s^2}=\dfrac{4}{s}-\dfrac{7}{s^2}$ **P1** et **P2**

b) $\mathscr{L}\{2\sin(5t)\}-\mathscr{L}\{6\cos(5t)\}=2\dfrac{5}{s^2+25}-6\dfrac{s}{s^2+25}=\dfrac{10-6s}{s^2+25}$ **P6** et **P7** avec $\omega=5$

c) $\mathscr{L}\{2e^{-3t}\}+3\mathscr{L}\{t\sin(4t)\}=2\dfrac{1}{s+3}+3\dfrac{2\cdot 4s}{\left(s^2+16\right)^2}=\dfrac{2}{s+3}+\dfrac{24s}{\left(s^2+16\right)^2}$

P4 avec $a=3$ et **P10** avec $\omega=4$

d) $\mathscr{L}\{4e^{2t}\}-2\mathscr{L}\{e^{-2t}\sin(3t)\}=4\dfrac{1}{s-2}-2\dfrac{3}{(s+2)^2+9}=\dfrac{4}{s-2}-\dfrac{6}{s^2+4s+13}$

P4 $a=-2$ et **P8** $a=2$ et $\omega=3$

e) $\mathscr{L}\{2t^3\}-\mathscr{L}\{4t\,e^{-3t}\}+\mathscr{L}\{5\}=2\dfrac{3!}{s^{3+1}}-4\dfrac{1}{(s+3)^2}+\dfrac{5}{s}=\dfrac{12}{s^4}-\dfrac{4}{(s+3)^2}+\dfrac{5}{s}$

P3 $n=3$, **P5** $a=3$ et **P1**

f) $\mathscr{L}\{e^{2t}\}-\mathscr{L}\{e^{-2t}\}=\dfrac{1}{s-2}-\dfrac{1}{s+2}=\dfrac{4}{s^2-4}$

P4 avec $a=-2$ pour e^{2t} et $a=2$ pour e^{-2t}

g) $\mathscr{L}\left\{\left(1+e^t\right)^2\right\}=\mathscr{L}\{1+2e^t+e^{2t}\}=\dfrac{1}{s}+\dfrac{2}{s-1}+\dfrac{1}{s-2}$ **P1**, **P4** $a=-1$ et $a=-2$

h) $\mathscr{L}\left\{(2+3t)^2-1\right\}=\mathscr{L}\{4+12t+9t^2-1\}=\mathscr{L}\{3+12t+9t^2\}=\dfrac{3}{s}+\dfrac{12}{s^2}+\dfrac{9\cdot 2!}{s^3}$

$=\dfrac{3}{s}+\dfrac{12}{s^2}+\dfrac{18}{s^3}$

On a développé $(2t+3)^2-1$, puis utilisation de **P1**, **P2** et **P3** $n=2$

i) $\mathscr{L}\left\{\left(1+e^{t}\right)\cdot\left(1-e^{-t}\right)\right\}=\mathscr{L}\left\{e^{t}-e^{-t}\right\}$ Le plus facile, pour arriver à ce résultat, est de le calculer à la main; parce qu'on risque d'avoir du sinus hyperbolique, avec la calculatrice...

$\mathscr{L}\left\{e^{t}-e^{-t}\right\}=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1}=\frac{2}{s^{2}-1}$ **P4** $a=-1$ et $a=-1$ puis dénominateur commun

j) $\mathscr{L}\left\{2e^{5t-1}+4t\cos(2t)\right\}=2e^{-1}\mathscr{L}\left\{e^{5t}\right\}+4\mathscr{L}\left\{t\cos(2t)\right\}=\frac{2e^{-1}}{s-5}+\frac{4\left(s^{2}-4\right)}{\left(s^{2}+4\right)^{2}}$

P4 $a=-5$ et **P11** $\omega=2$

k) Pour obtenir la formule $\sin^{2}(a)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2a)$, on peut soit consulter le formulaire mathématique (Annexe A.1) ou demander $\text{tCollect}\left(\left(\sin(a)\right)^{2}\right)$ sur la calculatrice . Il ne reste qu'à remplacer a par $3t$.

$\mathscr{L}\left\{\sin^{2}(3t)-3t\right\}=\mathscr{L}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(6t)-3t\right\}=\frac{1}{2s}-\frac{s}{2\left(s^{2}+36\right)}-\frac{3}{s^{2}}$

P1, **P7** $\omega=6$ et **P2**

l) Encore une identité trigonométrique : $4\sin(2t)\cos(2t)=2\sin(4t)$.

$\mathscr{L}\left\{4\sin(2t)\cos(2t)\right\}=\mathscr{L}\left\{2\sin(4t)\right\}=\frac{8}{s^{2}+16}$ **P6** $\omega=4$

m) La calculatrice simplifie directement $\sin\left(8t-\frac{3\pi}{2}\right)$ en $\cos(8t)$

$\mathscr{L}\left\{2\sin\left(8t-\frac{3\pi}{2}\right)\right\}=2\mathscr{L}\left\{\cos(8t)\right\}=\frac{2s}{s^{2}+64}$ *P7* $\omega=8$

5.4- $\sinh(at)=\frac{1}{2}e^{at}-\frac{1}{2}e^{-at}$

$\Rightarrow \mathscr{L}\left\{\sinh(at)\right\}=\frac{1}{2}\mathscr{L}\left\{e^{at}-e^{-at}\right\}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s+a}\right)=\frac{1}{2}\frac{2a}{s^{2}-a^{2}}=\frac{a}{s^{2}-a^{2}}$ **P4**

La seule différence avec la transformée du sinus ordinaire est le signe − au dénominateur devant a^{2}

5.5- $\mathscr{L}\left\{e^{i\omega t}\right\}=\frac{1}{s-i\omega}$

Ici il faut savoir qu'on ne laisse jamais de i au dénominateur dans les nombres complexes. On peut alors soit effectuer la division à la main, soit demander à la calculatrice le résultat de cette division.

5.6- Commencez avec $\mathscr{L}\left\{e^{(a+i\omega)t}\right\}=\frac{1}{s-(a+i\omega)}$ et continuez!

retour au début du chapitre 5

Section 5.2

5.7-a) Utilisons **P19** à cause du e^{4t}.

On a donc $a=-4$ et $f(t)=t^2 \Rightarrow F(s)=\dfrac{2!}{s^{2+1}}=\dfrac{2}{s^3}$

$$\mathscr{L}\left\{7t^2 e^{4t}\right\}=7F(s+a)=7F(s-4)=\frac{14}{(s-4)^3}$$

b) Utilisons **P19**, avec $a=2$ et

$f(t)=(1+t)^2=1+2t+t^2 \Rightarrow F(s)=\dfrac{1}{s}+\dfrac{2}{s^2}+\dfrac{2}{s^3}$ P1, P2 et P3 $n=2$

$$\mathscr{L}\left\{e^{-2t}(1+t)^2\right\}=F(s+2)=\frac{1}{s+2}+\frac{2}{(s+2)^2}+\frac{2}{(s+2)^3}$$

c) Utilisons **P20** à cause de la multiplication par t^3 et bien sûr **P1** pour le 2ème terme.

$n=3$ et $f(t)=\sin(4t) \Rightarrow F(s)=\dfrac{4}{s^2+16}$ **P6** $\omega=4$

$$\mathscr{L}\left\{2t^3\sin(4t)+2\right\}=2\mathscr{L}\left\{t^3\sin(4t)\right\}+\mathscr{L}\{2\}=2\cdot(-1)^3\cdot\left(\frac{4}{s^2+16}\right)'''+\frac{2}{s}$$

$$=\frac{192s\left(s^2-16\right)}{\left(s^2+16\right)^4}+\frac{2}{s}$$

$$\boxed{(-1)^3\cdot\frac{d^3}{ds^3}\left(\frac{4}{s^2+16}\right) \qquad \frac{96\cdot s\cdot\left(s^2-16\right)}{\left(s^2+16\right)^4}}$$

d) **P19** avec $a=-5$ et $f(t)=4t\cos(3t) \Rightarrow F(s)=4\dfrac{s^2-3^2}{\left(s^2+9\right)^2}$ **P11** $\omega=3$

$$\mathscr{L}\left\{e^{5t}\cdot 4t\cos(3t)\right\}=F(s-5)=4\frac{(s-5)^2-9}{\left((s-5)^2+9\right)^2}=\frac{4\left(s^2-10s+16\right)}{\left(s^2-10s+34\right)^2}$$

e) $(2t+1)^2\cos(5t)=\left(4t^2+4t+1\right)\cos(5t)=4t^2\cos(5t)+4t\cos(5t)+\cos(5t)$

Pour le 1er terme, on prendra **P20**, avec $n=2$ et $f(t)=\cos(5t) \Rightarrow F(s)=\dfrac{s}{s^2+25}$

On a utilisé **P7** $\omega=5$, et on le réutilisera dans le 3ème terme; pour le 2ème terme, on utilisera plutôt **P11** $\omega=5$.

$$\mathcal{L}\left\{4t^2\cos(5t)\right\}+\mathcal{L}\left\{4t\cos(5t)\right\}+\mathcal{L}\left\{\cos(5t)\right\}$$

$$=4\cdot(-1)^2\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+25}\right)+4\frac{s^2-25}{\left(s^2+25\right)^2}+\frac{s}{s^2+25}$$

$$=\frac{8s\cdot\left(s^2-75\right)}{\left(s^2+25\right)^3}+4\frac{s^2-25}{\left(s^2+25\right)^2}+\frac{s}{s^2+25}$$

$$\boxed{4\cdot(-1)^2\cdot\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{s}{s^2+25}\right)\qquad\frac{8\cdot s\cdot\left(s^2-75\right)}{\left(s^2+25\right)^3}}$$

5.8-a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s+2}-\frac{3}{s+3}\right\}=4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}-3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}=4e^{-2t}-3e^{-3t}$

P4, $a=2$ et $a=3$

b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+1}{s^2+9}\right\}=3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\}=3\cos(3t)+\frac{1}{3}\sin(3t)$

P7 et **P27**, $\omega=3$

c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2-s}{5+s^2}-\frac{4}{s-10}\right\}=2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+5}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+5}\right\}-4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-10}\right\}$

$=\frac{2\sqrt{5}}{5}\sin\left(\sqrt{5}\,t\right)-\cos\left(\sqrt{5}\,t\right)-4e^{10t}$ **P7** et **P27** $\omega=\sqrt{5}$ et **P4** $a=-10$

d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2+3s-s^2}{s^3}\right\}=2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\}+3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}=\frac{2t^2}{2!}+3t-1=t^2+3t-1$

P25 $n=3$, **P2** et **P1**

e) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s-5)^3}+\frac{2}{\left(s^2+25\right)^2}\right\}=4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-5)^3}\right\}+2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s^2+25\right)^2}\right\}$

$=\frac{4t^2e^{5t}}{2!}+\frac{2}{2\cdot5^3}\left(\sin(5t)-5t\cos(5t)\right)=2t^2e^{5t}+\frac{1}{125}\sin(5t)-\frac{t}{25}\cos(5t)$

P26 $n=3$ $a=5$, et **P29** $\omega=5$

f) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s-10}{s^2+4}-\frac{3}{(s+7)^2}\right\}=6\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}-5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}-3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+7)^2}\right\}$

$=6\cos(2t)-5\sin(2t)-3t\,e^{-7t}$ **P7** et **P6** $\omega=2$ et **P5** $a=7$

g) $$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s+1}{s^2-6s+13}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3(s-3)+9+1}{(s-3)^2+4}\right\}$$

$$=3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s-3}{(s-3)^2+4}\right\}+5\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-3)^2+4}\right\}$$

$$=3e^{3t}\cos(2t)+5e^{3t}\sin(2t)\quad \textbf{P9} \text{ et } \textbf{P8}\ a=3\ \ \omega=2$$

h) $$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{s^2+2s+2}-\frac{1}{s^2+s+1}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(s+1)-2}{(s+1)^2+1}-\frac{1}{\left(s+1/2\right)^2+3/4}\right\}$$

$$=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right\}-2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+1}\right\}-\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s+1/2\right)^2+3/4}\right\}$$

$$=e^{-t}\cos(t)-2e^{-t}\sin(t)-\frac{1}{\sqrt{3}/2}e^{-t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$$=e^{-t}\cdot\left(\cos(t)-2\sin(t)\right)-\frac{2\sqrt{3}}{3}e^{-t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

P9 et **P8** $a=1\ \ \omega=1$ et **P8** $a=\frac{1}{2}\ \ \omega=\frac{\sqrt{3}}{2}$

i) $$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s-1}{4s^2+4s+5}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s-1}{4\left(s+1/2\right)^2+4}\right\}=\frac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2\left(s+1/2\right)-2}{\left(s+1/2\right)^2+1}\right\}$$

$$=\frac{2}{4}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+1/2\right)^2+1}\right\}-\frac{2}{4}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s+1/2\right)^2+1}\right\}=\frac{1}{2}e^{-t/2}\cos(t)-\frac{1}{2}e^{-t/2}\sin(t)$$

P9 et **P8** $a=\frac{1}{2}\ \ \omega=1$

j) $$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s}{\left(s^2+8\right)^2}\right\}=3\cdot\frac{1}{2\cdot2\sqrt{2}}t\sin\left(2\sqrt{2}\,t\right)=\frac{3\sqrt{2}}{8}t\sin\left(2\sqrt{2}\,t\right)$$

k) $$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+4}-\frac{4}{\left(s^2+4\right)^2}\right\}=\frac{4}{2}\sin(2t)-\frac{4}{2(2)^3}\left(\sin(2t)-2t\cos(2t)\right)$$

$$=\left(2-\frac{1}{4}\right)\sin(2t)+\frac{1}{4}\cdot 2t\cos(2t)=\frac{7}{4}\sin(2t)+\frac{1}{2}t\cos(2t)$$

P27 et **P29** $\omega=2$

5.9-a) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s-8}{s^2-16}\right\}=\frac{5}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\}+\frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\}=\frac{5}{2}e^{-4t}+\frac{1}{2}e^{4t}$ **P4** $a=4$ et $a=-4$

$$\operatorname{expand}\left(\frac{3\cdot s-8}{s^2-16}\right) \qquad \frac{5}{2\cdot(s+4)}+\frac{1}{2\cdot(s-4)}$$

b) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5s+4}{2s^2-s-1}\right\}=3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}-\frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1/2}\right\}=3e^{t}-\frac{1}{2}e^{-t/2}$ **P4** $a=-1$ et $a=\frac{1}{2}$

$$\operatorname{expand}\left(\frac{5\cdot s+4}{2\cdot s^2-s-1}\right) \qquad \frac{3}{s-1}-\frac{1}{2\cdot s+1}$$

c) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2-4}{3s^2\cdot(s^2+4)}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}-\frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}=\frac{1}{2}\sin(2t)-\frac{1}{3}t$ **P27** $\omega=2$ et **P2**

$$\operatorname{expand}\left(\frac{2\cdot s^2-4}{3\cdot s^2\cdot(s^2+4)}\right) \qquad \frac{1}{s^2+4}-\frac{1}{3\cdot s^2}$$

d) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2+15s+5}{(s+1)^2\cdot(s-2)}\right\}=\frac{-25}{9}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}+\frac{8}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}+\frac{43}{9}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}$

$$=\frac{-25}{9}e^{-t}+\frac{8}{3}t\,e^{-t}+\frac{43}{9}e^{2t}$$ **P4** et **P5** $a=1$ puis **P4** $a=-2$

$$\operatorname{expand}\left(\frac{2\cdot s^2+15\cdot s+5}{(s+1)^2\cdot(s-2)}\right) \qquad \frac{-25}{9\cdot(s+1)}+\frac{8}{3\cdot(s+1)^2}+\frac{43}{9\cdot(s-2)}$$

e) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{9}{(s^4-2s^2-8)\cdot(2s+1)}\right\}=$

$$\frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2}\right\}-\frac{1}{6}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2}\right\}-\frac{16}{15\cdot 2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1/2}\right\}+\frac{1}{8}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}+\frac{3}{40}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\cos\left(\sqrt{2}\,t\right)-\frac{1}{6\sqrt{2}}\sin\left(\sqrt{2}\,t\right)-\frac{8}{15}e^{-t/2}+\frac{1}{8}e^{-2t}+\frac{3}{40}e^{2t}$$

$$=\frac{1}{3}\cos\left(\sqrt{2}\,t\right)-\frac{\sqrt{2}}{12}\sin\left(\sqrt{2}\,t\right)-\frac{8}{15}e^{-t/2}+\frac{1}{8}e^{-2t}+\frac{3}{40}e^{2t}$$

P7 et P27 $\omega=\sqrt{2}$, P4 avec $a=\dfrac{1}{2}$, $a=2$ et $a=-2$

$$\operatorname{expand}\left(\frac{9}{\left(s^4-2\cdot s^2-8\right)\cdot(2\cdot s+1)}\right) \qquad \frac{s}{3\cdot\left(s^2+2\right)}-\frac{1}{6\cdot\left(s^2+2\right)}-\frac{16}{15\cdot(2\cdot s+1)}+\frac{1}{8\cdot(s+2)}+\frac{3}{40\cdot(s-2)}$$

f) $$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^4+5s^2+4}-\frac{s}{(s-1)^4}\right\}=$$

$$\frac{1}{3}\left(\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-s}{s^2+4}-\frac{1}{s^2+4}\right\}+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s^2+1}\right\}\right)-\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^3}\right\}-\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^4}\right\}$$

$$=\frac{-1}{3}\cos(2t)-\frac{1}{3\cdot 2}\sin(2t)+\frac{1}{3}\cos(t)+\frac{1}{3}\sin(t)-\frac{1}{2!}t^2e^t-\frac{1}{3!}t^3e^t$$

$$=\frac{-1}{3}\cos(2t)-\frac{1}{6}\sin(2t)+\frac{1}{3}\cos(t)+\frac{1}{3}\sin(t)-\frac{1}{2}t^2e^t-\frac{1}{6}t^3e^t$$

P7 et **P27**, $\omega=2$ puis $\omega=1$, **P26** $n=3$ puis $n=4$

$$\operatorname{expand}\left(\frac{s+1}{s^4+5\cdot s^2+4}-\frac{s}{(s-1)^4}\right) \qquad \frac{-s}{3\cdot\left(s^2+4\right)}-\frac{1}{3\cdot\left(s^2+4\right)}+\frac{s}{3\cdot\left(s^2+1\right)}+\frac{1}{3\cdot\left(s^2+1\right)}-\frac{1}{(s-1)^3}-\frac{1}{(s-1)^4}$$

g) $$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2+24s-8}{s^3+8s^2+8s+64}\right\}=3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+8}\right\}-\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+8}\right\}=3\cos\left(2\sqrt{2}\,t\right)-e^{-8t}$$

P7 $\omega=2\sqrt{2}$ et **P4** $a=8$

$$\operatorname{expand}\left(\frac{2\cdot s^2+24\cdot s-8}{s^3+8\cdot s^2+8\cdot s+64}\right) \qquad \frac{3\cdot s}{s^2+8}-\frac{1}{s+8}$$

h) $$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5-12s+4s^2}{1-3s+4s^2-12s^3}\right\}=\frac{4}{4}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1/4}\right\}-\frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1/3}\right\}$$

$$=\frac{1}{1/2}\sin\left(\frac{t}{2}\right)-\frac{1}{3}e^{t/3}=2\sin\left(\frac{t}{2}\right)-\frac{1}{3}e^{t/3}$$ **P27** $\omega=\dfrac{1}{2}$ **P4** $a=\dfrac{-1}{3}$

$$\operatorname{expand}\left(\frac{5-12\cdot s+4\cdot s^2}{1-3\cdot s+4\cdot s^2-12\cdot s^3}\right) \qquad \frac{4}{4\cdot s^2+1}-\frac{1}{3\cdot s-1}$$

i) $$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4s}{4s^2-4s-15}+\frac{s+3}{6s^2+s-1}\right\}$$

$$=\frac{2}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1/3}\right\}+\frac{3}{4\cdot 2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3/2}\right\}-\frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1/2}\right\}+\frac{5}{4\cdot 2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-5/2}\right\}$$

$$=\frac{2}{3}e^{t/3}+\frac{3}{8}e^{-3t/2}-\frac{1}{2}e^{-t/2}+\frac{5}{8}e^{5t/2}$$

P4 les 4 fois : $a=\dfrac{-1}{3}$, $a=\dfrac{3}{2}$, $a=\dfrac{1}{2}$ et $a=\dfrac{-5}{2}$

$\text{expand}\left(\dfrac{4\cdot s}{4\cdot s^2-4\cdot s-15}+\dfrac{s+3}{6\cdot s^2+s-1}\right)$	$\dfrac{2}{3\cdot s-1}+\dfrac{3}{4\cdot(2\cdot s+3)}-\dfrac{1}{2\cdot s+1}+\dfrac{5}{4\cdot(2\cdot s-5)}$

j) $$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s^3-2s^2-2s+1}{s^2\cdot(s-1)^2}-\frac{3}{(s-1)^2}\right\}=2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}-4\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\}+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}$$

$=2e^t-4t\cdot e^t+t$ **P4** et **P5** $a=-1$ et **P2**

$\text{expand}\left(\dfrac{2\cdot s^3-2\cdot s^2-2\cdot s+1}{s^2\cdot(s-1)^2}-\dfrac{3}{(s-1)^2}\right)$	$\dfrac{2}{s-1}-\dfrac{4}{(s-1)^2}+\dfrac{1}{s^2}$

k) $$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1+s+3s^3-3s^4}{(s+1)\cdot(2s^4+s^2)}\right\}=\frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+\frac{1}{2}}\right\}-2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}$$

$=\dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}t\right)-2e^{-t}+t=\dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\right)-2e^{-t}+t$ **P7** $\omega=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, **P4** $a=1$ et **P2**

$\text{expand}\left(\dfrac{1+s+3\cdot s^3-3\cdot s^4}{(s+1)\cdot(2\cdot s^4+s^2)}\right)$	$\dfrac{s}{2\cdot s^2+1}-\dfrac{2}{s+1}+\dfrac{1}{s^2}$

5.10-a) On prend la transformée de Laplace de l'équation différentielle, avec $\mathscr{L}\{x\}=X$

donc $\mathscr{L}\{x'\}=s\cdot X-x(0)=s\cdot X-3$ **P16**

et $\mathscr{L}\{x''\}=s^2\cdot X-s\cdot x(0)-x'(0)=s^2\cdot X-3s-5$ **P17**

$\mathscr{L}\{x''\}-4\mathscr{L}\{x'\}+3\mathscr{L}\{x\}=\mathscr{L}\{0\}$

$s^2X-3s-5-4(sX-3)+3X=0$

On isole *X* avec la calculatrice et on obtient

$X=\dfrac{3s-7}{s^2-4s+3}=\dfrac{2}{s-1}+\dfrac{1}{s-3}$

$\boxed{x(t)=\mathscr{L}^{-1}\{X\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2}{s-1}+\dfrac{1}{s-3}\right\}=2e^t+e^{3t}}$ **P4** $a=-1$ et $a=-3$

$\text{solve}(s^2\cdot x-3\cdot s-5-4\cdot(s\cdot x-3)+3\cdot x=0,x)$	$x=\dfrac{3\cdot s-7}{s^2-4\cdot s+3}$
$\text{expand}(x)\mid x=\dfrac{3\cdot s-7}{s^2-4\cdot s+3}$	$\dfrac{2}{s-1}+\dfrac{1}{s-3}$

b) On prend la transformée de Laplace de l'équation différentielle, avec $\mathscr{L}\{x\}=X$

donc $\mathscr{L}\{x''\}=s^2\cdot X-s\cdot x(0)-x'(0)=s^2\cdot X-1$ **P17**

$\mathscr{L}\{x''\}+9\mathscr{L}\{x\}=20\mathscr{L}\{e^{-t}\}$

$$s^2X-1+9X=\frac{20}{s+1} \quad \textbf{P4} \; a=1$$

$$X=\frac{s+21}{(s+1)\cdot(s^2+9)}=\frac{3}{s^2+9}-\frac{2s}{s^2+9}+\frac{2}{s+1}$$

$$\boxed{x(t)=\mathscr{L}^{-1}\{X\}=\sin(3t)-2\cos(3t)+2e^{-t}} \quad \textbf{P6} \text{ et } \textbf{P7} \; \omega=3 \text{ et } \textbf{P4} \; a=1$$

$\operatorname{solve}\left(s^2\cdot x-1+9\cdot x=\frac{20}{s+1},x\right)$	$x=\frac{s+21}{(s+1)\cdot(s^2+9)}$
$\operatorname{expand}(x)\vert x=\frac{s+21}{(s+1)\cdot(s^2+9)}$	$\frac{-2\cdot s}{s^2+9}+\frac{3}{s^2+9}+\frac{2}{s+1}$

c) On prend la transformée de Laplace de l'équation différentielle, avec $\mathscr{L}\{y\}=Y$

donc $\mathscr{L}\{y'\}=s\cdot Y-y(0)=s\cdot Y-4$ **P16**

et $\mathscr{L}\{y''\}=s^2\cdot Y-s\cdot y(0)-y'(0)=s^2\cdot Y-4s-1$ **P17**

$$\mathscr{L}\{y''\}-2\mathscr{L}\{y'\}+\mathscr{L}\{y\}=6\mathscr{L}\{t\}$$

$$s^2Y-4s-1-2(s\cdot Y-4)+Y=\frac{6}{s^2} \quad \textbf{P2}$$

On isole Y : $Y=\dfrac{4s^3-7s^2+6}{s^2\cdot(s^2-2s+1)}=\dfrac{3}{(s-1)^2}-\dfrac{8}{s-1}+\dfrac{12}{s}+\dfrac{6}{s^2}$

$$\boxed{y(t)=\mathscr{L}^{-1}\{Y\}=3t\cdot e^t-8e^t+12+6t} \quad \textbf{P5} \text{ et } \textbf{P4} \; a=-1\text{, } \textbf{P1} \text{ et } \textbf{P2}$$

$\operatorname{solve}\left(s^2\cdot y-4\cdot s-1-2\cdot(s\cdot y-4)+y=\frac{6}{s^2},y\right)$	$y=\frac{4\cdot s^3-7\cdot s^2+6}{s^2\cdot(s^2-2\cdot s+1)}$
⚠ $\operatorname{expand}(y)\vert y=\frac{4\cdot s^3-7\cdot s^2+6}{s^2\cdot(s^2-2\cdot s+1)}$	$\frac{-8}{s-1}+\frac{3}{(s-1)^2}+\frac{12}{s}+\frac{6}{s^2}$

d) On prend la transformée de Laplace de l'équation différentielle, avec $\mathscr{L}\{y\}=Y$

donc $\mathscr{L}\{y'\}=s\cdot Y-y(0)=s\cdot Y$ **P16**

et $\mathscr{L}\{y''\}=s^2\cdot Y-s\cdot y(0)-y'(0)=s^2\cdot Y-2$ **P17**

$$\mathscr{L}\{y''\}-4\mathscr{L}\{y'\}+4\mathscr{L}\{y\}=25\mathscr{L}\left\{t^2e^{-3t}\right\} \quad \text{P19} \; a=3 \quad f(t)=t^2$$

$$F(s)=\mathscr{L}\left\{t^2\right\}=\frac{2}{s^3} \quad \text{P3} \; n=2$$

$$F(s+3)=\frac{2}{(s+3)^3}$$

$$s^2Y-2-4s\cdot Y+4Y=\frac{2}{(s+3)^3}$$

On isole Y :

$$Y=\frac{2\left(s^3+9s^2+27s+52\right)}{(s+3)^3\left(s^2-4s+4\right)}=\frac{6}{25(s+3)}+\frac{4}{5(s+3)^2}+\frac{2}{(s+3)^3}-\frac{6}{25(s-2)}+\frac{12}{5(s-2)^2}$$

$$\boxed{y(t)=\mathscr{L}^{-1}\{Y\}=\frac{6}{25}e^{-3t}+\frac{4}{5}t\cdot e^{-3t}+t^2\cdot e^{-3t}-\frac{6}{25}e^{2t}+\frac{12}{5}t\cdot e^{2t}}$$

$\operatorname{solve}\left(s^2\cdot y-2-4\cdot s\cdot y+4\cdot y=\frac{50}{(s+3)^3},y\right)$	$y=\frac{2\cdot\left(s^3+9\cdot s^2+27\cdot s+52\right)}{(s+3)^3\cdot\left(s^2-4\cdot s+4\right)}$
$\operatorname{expand}\left(y=\frac{2\cdot\left(s^3+9\cdot s^2+27\cdot s+52\right)}{(s+3)^3\cdot\left(s^2-4\cdot s+4\right)}\right)$	$y=\frac{6}{25\cdot(s+3)}+\frac{4}{5\cdot(s+3)^2}+\frac{2}{(s+3)^3}-\frac{6}{25\cdot(s-2)}+\frac{12}{5\cdot(s-2)^2}$

e) On prend la transformée de Laplace de l'équation différentielle, avec $\mathscr{L}\{x\}=X$

donc $\mathscr{L}\{x'\}=s\cdot X-x(0)=s\cdot X-2$ **P16**

et $\mathscr{L}\{x''\}=s^2\cdot X-s\cdot x(0)-x'(0)=s^2\cdot X-2s-1$ **P17**

$$\mathscr{L}\{x''\}+4\mathscr{L}\{x'\}+20\mathscr{L}\{x\}=\mathscr{L}\{0\}$$

$$s^2X-2s-1+4(sX-2)+20X=0$$

$$X=\frac{2s+9}{s^2+4s+20}=\frac{2(s+2)+5}{(s+2)^2+16}$$

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}\{X\}=2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+16}\right\}+5\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+16}\right\}$$

$\boxed{x(t)=2e^{-2t}\cos(4t)+\frac{5}{4}e^{-2t}\sin(4t)}$ **P9** et **P28** $a=2$ $\omega=4$

$\operatorname{solve}\left(s^2\cdot x-2\cdot s-1+4\cdot(s\cdot x-2)+20\cdot x=0,x\right)$	$x=\frac{2\cdot s+9}{s^2+4\cdot s+20}$
$\operatorname{completeSquare}\left(s^2+4\cdot s+20,s\right)$	$(s+2)^2+16$

f) On prend la transformée de Laplace de l'équation différentielle, avec $\mathscr{L}\{x\}=X$

donc $\mathscr{L}\{x'\}=s\cdot X-x(0)=s\cdot X-2$ **P16**

et $\mathscr{L}\{x''\}=s^2\cdot X-s\cdot x(0)-x'(0)=s^2\cdot X-2s-1$ **P17**

$$\mathscr{L}\{x''\}+4\mathscr{L}\{x'\}+10\mathscr{L}\{x\}=2\mathscr{L}\left\{e^{-5t}\right\}$$

$$s^2X-2s-1+4(sX-2)+10X=\frac{2}{s+5}$$

$$X=\frac{2s^2+19s+47}{(s+5)\cdot\left(s^2+4s+10\right)}=\frac{28s+137}{15\left(s^2+4s+10\right)}+\frac{2}{15(s+5)}$$

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}\{X\}=\frac{1}{15}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{28(s+2)+81}{(s+2)^2+6}\right\}+\frac{2}{15}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+5}\right\}$$

$$x(t)==\frac{28}{15}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+6}\right\}+\frac{81}{15}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+6}\right\}+\frac{2}{15}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+5}\right\}$$

$$x(t)==\frac{28}{15}e^{-2t}\cos\left(\sqrt{6}\,t\right)+\frac{27}{5\sqrt{6}}e^{-2t}\sin\left(\sqrt{6}\,t\right)+\frac{2}{15}e^{-5t}$$

P9 et **P28** $a=2$ $\omega=\sqrt{6}$ puis **P4** $a=5$

$$\boxed{x(t)==\frac{28}{15}e^{-2t}\cos\left(\sqrt{6}\,t\right)+\frac{9\sqrt{6}}{10}e^{-2t}\sin\left(\sqrt{6}\,t\right)+\frac{2}{15}e^{-5t}}$$

$\text{solve}\left(s^2\cdot x-2\cdot s-1+4\cdot(s\cdot x-2)+10\cdot x=\frac{2}{s+5},x\right)$	$x=\frac{2\cdot s^2+19\cdot s+47}{(s+5)\cdot(s^2+4\cdot s+10)}$
$\text{expand}(x)\vert x=\frac{2\cdot s^2+19\cdot s+47}{(s+5)\cdot(s^2+4\cdot s+10)}$	$\frac{28\cdot s}{15\cdot(s^2+4\cdot s+10)}+\frac{137}{15\cdot(s^2+4\cdot s+10)}+\frac{2}{15\cdot(s+5)}$
$\text{completeSquare}(s^2+4\cdot s+10,s)$	$(s+2)^2+6$

g) On prend la transformée de Laplace de l'équation différentielle, avec $\mathscr{L}\{y\}=Y$

donc $\mathscr{L}\{y'\}=s\cdot Y-y(0)=s\cdot Y-3$ **P16**

$\mathscr{L}\{y''\}=s^2\cdot Y-s\cdot y(0)-y'(0)=s^2\cdot Y-3s+1$ **P17**

$\mathscr{L}\{y'''\}=s^3\cdot Y-s^2\cdot y(0)-s\cdot y'(0)-y''(0)=s^3\cdot Y-3s^2+s-2$ **P18** $n=3$

$\mathscr{L}\{y'''\}-2\mathscr{L}\{y''\}+\mathscr{L}\{y'\}-2\mathscr{L}\{y\}=4\mathscr{L}\{t\}+\mathscr{L}\{1\}$

$s^3Y-3s^2+s-2-2\left(s^2Y-3s+1\right)+\left(s\cdot Y-3\right)-2Y=\frac{4}{s^2}+\frac{1}{s}$ **P2** et **P1**

$$Y=\frac{3s^4-7s^3+7s^2+s+4}{s^2\cdot\left(s^3-2s^2+s-2\right)}=\frac{16s}{5\left(s^2+1\right)}-\frac{8}{5\left(s^2+1\right)}+\frac{13}{10(s-2)}-\frac{3}{2s}-\frac{2}{s^2}$$

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}\{Y\}$$

$$y(t)=\frac{16}{5}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}-\frac{8}{5}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}+\frac{13}{10}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}-2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}-\frac{3}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$$

$\boxed{y(t)=\frac{16}{5}\cos(t)-\frac{8}{5}\sin(t)+\frac{13}{10}e^{2t}-2t-\frac{3}{2}}$ **P7** et **P6** $\omega=1$, **P4** $a=-2$, **P2** et **P1**

$\text{solve}\left(s^3\cdot y-3\cdot s^2+s-2-2\cdot(s^2\cdot y-3\cdot s+1)+s\cdot y-3-2\cdot y=\frac{4}{s^2}+\frac{1}{s},y\right)$	$y=\frac{3\cdot s^4-7\cdot s^3+7\cdot s^2+s+4}{s^2\cdot(s^3-2\cdot s^2+s-2)}$
⚠ $\text{expand}(y)\vert y=\frac{3\cdot s^4-7\cdot s^3+7\cdot s^2+s+4}{s^2\cdot(s^3-2\cdot s^2+s-2)}$	$\frac{16\cdot s}{5\cdot(s^2+1)}-\frac{8}{5\cdot(s^2+1)}+\frac{13}{10\cdot(s-2)}-\frac{3}{2\cdot s}-\frac{2}{s^2}$

5.11- Il faut calculer $\mathscr{L}\{\cos(\omega\cdot t)\} = \dfrac{1}{\omega}\mathscr{L}\left\{\left(\sin(\omega\cdot t)\right)'\right\}$ en utilisant **P6** et **P16**,

Le but est d'arriver à **P7**

5.12- Suivez l'indice qui est donné dans le manuel.

retour au début du chapitre 5

Section 5.3

5.13-a) On utilise **P21** parce que la fonction échelon est multipliée par une variable.

$g(t)=t$ et $a=1$; on calcule $g(t+a)=g(t+1)=t+1$

$$\mathscr{L}\{t\cdot u(t-1)\}=e^{-1\cdot s}\cdot\mathscr{L}\{t+1\}=e^{-s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\right)$$ **P2** et **P1**

b) **P21** avec $g(t)=(t-3)^2$ et $a=3$

On calcule $g(t+3)=t^2$

$$\mathscr{L}\left\{(t-3)^2\cdot u(t-3)\right\}=e^{-3s}\mathscr{L}\left\{t^2\right\}=e^{-3s}\frac{2}{s^3}=\frac{2e^{-3s}}{s^3}$$ **P3** $n=2$

c) **P21** avec $g(t)=t+1$ et $a=5$

On calcule $g(t+5)=t+6$

$$\mathscr{L}\{(t+1)\cdot u(t-5)\}=e^{-5s}\cdot\mathscr{L}\{t+6\}=e^{-5s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{6}{s}\right)$$ **P2** et **P1**

d) Pour le premier terme, **P21** avec $g(t)=e^{2t}$ et $a=3$

On calcule $g(t+3)=e^{2(t+3)}=e^{2t+6}=e^6\cdot e^{2t}$

$$\mathscr{L}\left\{e^{2t}\cdot u(t-3)\right\}=e^{-3s}\cdot e^6\cdot\mathscr{L}\left\{e^{2t}\right\}=\frac{e^{6-3s}}{s-2}$$ **P4** $a=-2$

Pour le deuxième terme, **P21** avec $g(t)=e^{-3t}$ et $a=2$

On calcule $g(t+2)=e^{-3(t+2)}=e^{-3t-6}=e^{-6}\cdot e^{-3t}$

$$\mathscr{L}\left\{e^{-3t}\cdot u(t-2)\right\}=e^{-2s}\cdot e^{-6}\cdot\mathscr{L}\left\{e^{-3t}\right\}=\frac{e^{-6-2s}}{s+3}$$ **P4** $a=3$

$$\mathscr{L}\left\{e^{2t}\cdot u(t-3)-e^{-3t}\cdot u(t-2)\right\}=\frac{e^{6-3s}}{s-2}-\frac{e^{-6-2s}}{s+3}$$

e) Pour le premier terme, **P21** avec $g(t)=\cos(2t)$ et $a=\frac{\pi}{2}$

On calcule $g\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(2t+\pi)=-\cos(2t)$

$$\mathscr{L}\left\{\cos(2t)\cdot u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right\}=e^{-\pi/2\, s}\mathscr{L}\{-\cos(2t)\}=\frac{-s\cdot e^{-\pi s/2}}{s^2+4}$$ **P7** $\omega=2$

Pour le deuxième terme, **P7** $\omega=2$: $\mathscr{L}\{3\cos(2t)\}=\dfrac{3s}{s^2+4}$

$$\mathscr{L}\left\{\cos(2t)\cdot u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)+3\cos(2t)\right\}=\frac{3s}{s^2+4}-\frac{s\cdot e^{-\pi s/2}}{s^2+4}$$

f) **P15** avec $a=3$ pour le premier terme, et P14 pour le deuxième :

$$\mathscr{L}\{2\delta(t-3)-\delta(t)\}=2e^{-3s}-1$$

g) $\mathscr{L}\{2-2u(t-1)-2\delta(t-1)\}=\frac{2}{s}-\frac{2e^{-s}}{s}-2e^{-s}$ **P1**, **P13** $a=1$ et **P15** $a=1$

5.14-a) $g(t)=2u(t)+(-2-1)u(t-1)=2u(t)-3u(t-1)$

$\mathscr{L}\{2u(t)-3u(t-1)\}=\frac{2}{s}-\frac{3e^{-s}}{s}$ **P1** et **P13** $a=1$

b) $f(t)=3u(t)+(-3+t)u(t-2)$

$\mathscr{L}\{3u(t)+(t-3)u(t-2)\}=3\frac{1}{s}+e^{-2s}\mathscr{L}\{(t+2)-3\}$ **P1** et **P21** $g(t)=t-3 \quad a=2$

$=\frac{3}{s}+e^{-2s}\mathscr{L}\{t-1\}=\frac{3}{s}+e^{-2s}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}\right)$ **P2** et **P1**

c) $g(t)=\left(1-t^2\right)u(t)+\left(-\left(1-t^2\right)+1\right)u(t-1)=\left(1-t^2\right)u(t)+t^2u(t-1)$

$G(s)=\mathscr{L}\left\{\left(1-t^2\right)u(t)+t^2u(t-1)\right\}=\mathscr{L}\left\{\left(1-t^2\right)u(t)\right\}+\mathscr{L}\left\{t^2u(t-1)\right\}$

$=\mathscr{L}\{1\}-\mathscr{L}\left\{t^2\right\}+e^{-s}\mathscr{L}\left\{(t+1)^2\right\}=\frac{1}{s}-\frac{2}{s^3}+e^{-s}\mathscr{L}\left\{t^2+2t+1\right\}$

P1, **P3** $n=2$ et **P21** $g(t)=t^2 \quad a=1$

$G(s)=\frac{1}{s}-\frac{2}{s^3}+e^{-s}\left(\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s}\right)$ **P1**, **P2** et **P3** $n=2$

d) $q(t)=5u(t)+(-5+2+t)u(t-2)+\left(-(2+t)+4-t^2\right)u(t-4)$

$q(t)=5u(t)+(t-3)u(t-2)+\left(2-t-t^2\right)u(t-4)$

$Q(s)=5\mathscr{L}\{u(t)\}+\mathscr{L}\{(t-3)u(t-2)\}+\mathscr{L}\left\{\left(2-t-t^2\right)u(t-4)\right\}$

$Q(s)=\frac{5}{s}+e^{-2s}\mathscr{L}\{t+2-3\}+e^{-4s}\mathscr{L}\left\{2-(t+4)-(t+4)^2\right\}$

P1, **P21** $g(t)=t-3 \quad a=2$ et **P21** $g(t)=2-t-t^2 \quad a=4$

$Q(s)=\frac{5}{s}+e^{-2s}\mathscr{L}\{t-1\}+e^{-4s}\mathscr{L}\left\{-t^2-9t-18\right\}$

$$Q(s)=\frac{5}{s}+e^{-2s}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}\right)-e^{-4s}\left(\frac{2}{s^3}+\frac{9}{s^2}+\frac{18}{s}\right)$$ **P2** et **P1** 2 fois et **P3** $n=2$

e) $h(t)=1\cdot u(t)+(-1+\sin(t))u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$

$$H(s)=\mathscr{L}\{u(t)\}+\mathscr{L}\left\{(-1+\sin(t))u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

On utilisera **P1** pour le 1$^{\text{er}}$ terme et, pour le 2$^{\text{ème}}$, **P21** $g(t)=\sin(t)-1$ et $a=\frac{\pi}{2}$

$$g\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(t)-1$$

$$H(s)=\frac{1}{s}+e^{-\pi s/2}\mathscr{L}\{\cos(t)-1\}=\frac{1}{s}+e^{-\pi s/2}\left(\frac{s}{s^2+1}-\frac{1}{s}\right)$$ **P7** $\omega=1$ et **P1**

f) $f(t)=(4-t)u(t)+(-(4-t)+3)u(t-4)+(-3+9-t)u(t-6)$

$=(4-t)u(t)+(t-1)u(t-4)+(6-t)u(t-6)$

On prendra P21. Pour le premier, $g(t)=4-t \quad a=0$

Pour le deuxième, $g(t)=t-1 \quad a=4 \quad \Rightarrow g(t+4)=t+3$

Pour le dernier, $g(t)=6-t \quad a=6 \quad \Rightarrow g(t+6)=-t$

$$F(s)=\mathscr{L}\{(4-t)\}+e^{-4s}\mathscr{L}\{t+3\}-e^{-6s}\mathscr{L}\{t\}=\frac{4}{s}-\frac{1}{s^2}+e^{-4s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{3}{s}\right)-\frac{e^{-6s}}{s^2}$$

avec l'utilisation de **P1** et **P2**

5.15-a) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{(s+4)^2}\right\}+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\}$

Pour le premier, on passera par **P22**, $a=2$ et $F(s)=\frac{1}{(s+4)^2}$

$$\Rightarrow f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+4)^2}\right\}=te^{-4t}$$ **P5** $a=4$

ce qui donnera $f(t-2)=(t-2)e^{-4t+8}$

Pour le second, **P4** $a=4$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{(s+4)^2}+\frac{1}{s+4}\right\}=(t-2)e^{-4t+8}u(t-2)+e^{-4t}$$

b) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}e^{-5s}+\left(\frac{5s-1}{s^2+4}e^{-4s}\right)\right\}$

P22 pour les 2 termes

Pour le premier terme, $a=5$ et $F(s)=\dfrac{1}{s^3} \Rightarrow f(t)=\dfrac{t^2}{2}$ par **P25** $n=3$

$$\Rightarrow f(t-5)=\frac{1}{2}(t-5)^2$$

Pour le second, $a=4$ et $F(s)=2\dfrac{s}{s^2+4}-\dfrac{1}{s^2+4} \Rightarrow f(t)=2\cos(2t)-\dfrac{1}{2}\sin(2t)$

par **P7** et **P27** $\omega=2$

$$\Rightarrow f(t-4)=2\cos(2\cdot(t-4))-\frac{1}{2}\sin(2t-8)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}e^{-5s}+\left(\frac{5s-1}{s^2+4}e^{-4s}\right)\right\}=$$

$$\frac{1}{2}(t-5)^2u(t-5)+\left(2\cos(2t-8)-\frac{1}{2}\sin(2t-8)\right)\cdot u(t-4)$$

c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+1}e^{-\frac{\pi}{2}s}+\dfrac{s}{s^2+2}\right\}$

Pour le premier terme, **P22** $a=\dfrac{\pi}{2}$ et $F(s)=\dfrac{s}{s^2+1} \Rightarrow f(t)=\cos(t)$ **P7** $\omega=1$

$$\Rightarrow f\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=\sin(t)$$

Pour le deuxième terme, **P7** $\omega=\sqrt{2} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+2}\right\}=\cos\left(\sqrt{2}\,t\right)$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}e^{-\frac{\pi}{2}s}+\frac{s}{s^2+2}\right\}=\sin(t)\cdot u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\sqrt{2}\,t\right)$$

d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s^2-12}{\left(s^2-16\right)(s+5)}e^{-3s}\right\}$

On utilisera P22 $a=3$, et il faut décomposer en fractions partielles.

$$\text{expand}\left(\frac{3\cdot s^2-12}{\left(s^2-16\right)\cdot(s+5)}\right)$$
$$\frac{7}{s+5}-\frac{9}{2\cdot(s+4)}+\frac{1}{2\cdot(s-4)}$$

$$F(s)=\frac{3s^2-12}{\left(s^2-16\right)(s+5)}=\frac{7}{s+5}-\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{s+4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-4}$$

$\Rightarrow f(t)=7e^{-5t}-\dfrac{9}{2}e^{-4t}+\dfrac{1}{2}e^{4t}$, P4 les 3 fois, $a=5$, $a=4$ puis $a=-4$

$$\Rightarrow f(t-3)=7e^{-5t+15}-\frac{9}{2}e^{-4t+12}+\frac{1}{2}e^{4t-12}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s^2-12}{(s^2-16)(s+5)}e^{-3s}\right\}=\left(7e^{-5t+15}-\frac{9}{2}e^{-4t+12}+\frac{1}{2}e^{4t-12}\right)\cdot u(t-3)$$

5.16-a) $\dfrac{di}{dt}+2i=5\,\delta(t-1)$

On prend la transformée de l'équation différentielle, avec $\mathscr{L}\{i\}=I$

$s\cdot I-i(0)+2I=5e^{-s}$ **P16** pour la dérivée et **P15** $a=1$ pour la Dirac

$s\,I-2+2I=5e^{-s}\Rightarrow I=\dfrac{5e^{-s}}{s+2}+\dfrac{2}{s+2}$

$\boxed{i(t)=\mathscr{L}^{-1}\{I\}=5e^{-2(t-1)}\,u(t-1)+2e^{-2t}}$

par **P22** $a=1$, $F(s)=\dfrac{5}{s+2}\Rightarrow f(t)=e^{-2t}\Rightarrow f(t-1)=e^{-2(t-1)}$ **P4** $a=2$

et **P4** $a=2$ pour le deuxième terme.

b) On prend la T.L. de l'É.D., avec $\mathscr{L}\{x\}=X$

donc $\mathscr{L}\{x'\}=s\,X-x(0)=s\,X$ **P16**

et $\mathscr{L}\{x''\}=s^2X-s\,x(0)-x'(0)=s^2X+3$ **P17**

préparons-nous : $\mathscr{L}\{\delta(t-2)\}=e^{-2s}$ **P15** $a=2$

$\mathscr{L}\{x''+4x'+4x\}=\mathscr{L}\{6\,\delta(t-2)\}$

$s^2X+3+4s\,X+4X=6e^{-2s}\Rightarrow X=\dfrac{6}{s^2+4s+4}e^{-2s}-\dfrac{3}{s^2+4s+4}$

P22 $a=2$ et $F(s)=\dfrac{6}{s^2+4s+4}=\dfrac{6}{(s+2)^2}\Rightarrow f(t)=6t\,e^{-2t}$ P5 $a=2$

$\Rightarrow f(t-2)=6(t-2)e^{-2(t-2)}$

On résout le deuxième terme avec P5 $a=2$.

$\boxed{x(t)=\mathscr{L}^{-1}\{X\}=6(t-2)e^{-2t+4}\,u(t-2)-3t\,e^{-2t}}$

c) On prend la T.L. de l'É.D., avec $\mathscr{L}\{y\}=Y$

donc $\mathscr{L}\{y'\}=s\,Y-y(0)=s\,Y$ **P16**

on a $g(t)=2u(t)-u(t-3)\Rightarrow G(s)=\mathscr{L}\{g(t)\}=\dfrac{2}{s}-\dfrac{e^{-3s}}{s}$ **P1** et P**13** $a=3$

$\mathscr{L}\{y'+2y\}=\mathscr{L}\{g(t)\}$

$$sY+2Y=\frac{2}{s}-\frac{e^{-3s}}{s}\Rightarrow Y=2\frac{1}{s(s+2)}-e^{-3s}\frac{1}{s(s+2)}$$

$\text{expand}\left(\frac{1}{s\cdot(s+2)}\right)$	$\frac{1}{2\cdot s}-\frac{1}{2\cdot(s+2)}$

La même fonction apparaît dans les 2 termes. Pour le 1er terme, on prendra la transformée inverse directement, avec **P1** et **P4** $a=2$. Pour le 2ème terme, on passe par **P22** $a=3$ puis on calculera $f(t-3)$, à partir de $f(t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2t}$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}&=\mathscr{L}^{-1}\left\{2\frac{1}{s(s+2)}-e^{-3s}\frac{1}{s(s+2)}\right\}\\&=\mathscr{L}^{-1}\left\{2\cdot\left(\frac{1}{2s}-\frac{1}{2(s+2)}\right)-e^{-3s}\cdot\left(\frac{1}{2s}-\frac{1}{2(s+2)}\right)\right\}\\&=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}-\frac{1}{(s+2)}\right\}-\mathscr{L}^{-1}\left\{e^{-3s}\cdot\left(\frac{1}{2s}-\frac{1}{2(s+2)}\right)\right\}\\&=1-e^{-2t}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2(t-3)}\right)\cdot u(t-3)\end{aligned}$$

$$\boxed{y(t)=1-e^{-2t}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2t+6}\right)\cdot u(t-3)}$$

d) On prend la T.L. de l'É.D., avec $\mathscr{L}\{y\}=Y$

donc $\mathscr{L}\{y'\}=sY-y(0)=sY-1$ **P16**

et $\mathscr{L}\{y''\}=s^2Y-s\,y(0)-y'(0)=s^2Y-s$ **P17**

on a $g(t)=u(t)-2u(t-2)\Rightarrow G(s)=\frac{1}{s}-2\frac{e^{-2s}}{s}$ **P1** et **P13** $a=2$

$$\mathscr{L}\{y''-3y'+2y\}=\mathscr{L}\{g(t)\}$$

$$s^2Y-s-3(s\cdot Y-1)+2Y=\frac{1}{s}-\frac{2e^{-2s}}{s}$$

$\text{solve}\left(s^2\cdot y-s-3\cdot(s\cdot y-1)+2\cdot y=\frac{1}{s}-\frac{2\cdot e^{-2\cdot s}}{s},y\right)$	$y=\frac{e^{-2\cdot s}\cdot\left((s^2-3\cdot s+1)\cdot e^{2\cdot s}-2\right)}{s\cdot(s^2-3\cdot s+2)}$
⚠ $\text{expand}\left(\frac{e^{-2\cdot s}\cdot\left((s^2-3\cdot s+1)\cdot e^{2\cdot s}-2\right)}{s\cdot(s^2-3\cdot s+2)}\right)$	$\frac{2}{(s-1)\cdot(e^s)^2}-\frac{1}{(s-2)\cdot(e^s)^2}-\frac{1}{s\cdot(e^s)^2}+\frac{1}{s-1}-\frac{1}{2\cdot(s-2)}+\frac{1}{2\cdot s}$
⚠ $\frac{2}{(s-1)\cdot(e^s)^2}-\frac{1}{(s-2)\cdot(e^s)^2}-\frac{1}{s\cdot(e^s)^2}+\frac{1}{s-1}-\frac{1}{2\cdot(s-2)}+\frac{1}{2\cdot s}$	$\left(\frac{2}{s-1}-\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s}\right)\cdot e^{-2\cdot s}+\frac{1}{s-1}-\frac{1}{2\cdot(s-2)}+\frac{1}{2\cdot s}$

Remarquez que la présence d'une exponentielle, e^{-2s}, nous oblige à ramener la réponse, après « expand », sur la ligne d'édition, puis [ENTER]. On obtient ainsi l'effet voulu : on a développé en fractions partielles, et on voit clairement l'exponentielle.

$$Y=\left(\frac{2}{s-1}-\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s}\right)e^{-2s}+\frac{1}{s-1}-\frac{1}{2(s-2)}+\frac{1}{2s}$$

$\mathscr{L}^{-1}\{Y\}=f(t-2)\cdot u(t-2)+e^{t}-\frac{1}{2}e^{2t}+\frac{1}{2}$ **P4** $a=-1$, **P4** $a=-2$ et **P1**

où $f(t)=2e^{t}-e^{2t}-1$ pour **P22** $a=2$; **P4** $a=-1$, **P4** $a=-2$ et **P1**

$$\boxed{y(t)=\left(2e^{t-2}-e^{2(t-2)}-1\right)\cdot u(t-2)+e^{t}-\frac{1}{2}e^{2t}+\frac{1}{2}}$$

e) On prend la T.L. de l'É.D., avec $\mathscr{L}\{x\}=X$

donc $\mathscr{L}\{x''\}=s^2X-s\,x(0)-x'(0)=s^2X-1$ **P17**

calculons $\mathscr{L}\{u(t-3)\}=\dfrac{e^{-3s}}{s}$ **P13** $a=3$

$$\mathscr{L}\{x''+x\}=\mathscr{L}\{u(t-3)\}$$

$$s^2X-1+X=\frac{e^{-3s}}{s}$$

$$X=\frac{1}{s^2+1}+e^{-3s}\frac{1}{s\cdot\left(s^2+1\right)}$$

Premier terme : $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+1}\right\}=\sin(t)$ **P6** $\omega=1$

Deuxième terme : $\mathscr{L}^{-1}\left\{e^{-3s}\dfrac{1}{s\cdot\left(s^2+1\right)}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{e^{-3s}\left(\dfrac{1}{s}-\dfrac{s}{s^2+1}\right)\right\}$

$$\boxed{\operatorname{expand}\left(\frac{1}{s\cdot\left(s^2+1\right)}\right)\qquad\qquad \frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}}$$

P22 $a=3$ et $F(s)=\dfrac{1}{s}-\dfrac{s}{s^2+1}\Rightarrow f(t)=1-\cos(t)$ **P7** $\omega=1$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{e^{-3s}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}\right)\right\}=f(t-3)\cdot u(t-3)=\left(1-\cos(t-3)\right)\cdot u(t-3)$$

$$\boxed{x(t)=\sin(t)+\left(1-\cos(t-3)\right)\cdot u(t-3)}$$

f) On prend la T.L. de l'É.D., avec $\mathscr{L}\{y\}=Y$

donc $\mathscr{L}\{y''\}=s^2Y-s\,y(0)-y'(0)=s^2Y-1$ **P17**

on calcule $\mathscr{L}\{t-t\cdot u(t-2)\}=\dfrac{1}{s^2}-e^{-2s}\mathscr{L}\{t+2\}$ **P2** et **P21** $a=2$ et $f(t)=t$

finalement $\mathscr{L}\{t-t\cdot u(t-2)\}=\dfrac{1}{s^2}-e^{-2s}\left(\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{2}{s}\right)$

$$\mathscr{L}\{y''+y\}=\mathscr{L}\{t-t\cdot u(t-2)\}$$

$$s^2Y-1+Y=\frac{1}{s^2}-e^{-2s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s}\right)$$

$$Y=\frac{1}{s^2}+\left(2\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s^2+1}-\frac{2}{s}-\frac{1}{s^2}\right)\cdot e^{-2s}$$

$\operatorname{solve}\left(s^2\cdot y-1+y=\frac{1}{s^2}-e^{-2\cdot s}\cdot\left(\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s}\right),y\right)$	$y=\frac{e^{-2\cdot s}\cdot\left((s^2+1)\cdot e^{2\cdot s}-2\cdot s-1\right)}{s^2\cdot(s^2+1)}$
$\operatorname{expand}\left(\frac{e^{-2\cdot s}\cdot\left((s^2+1)\cdot e^{2\cdot s}-2\cdot s-1\right)}{s^2\cdot(s^2+1)}\right)$	$\frac{2\cdot s}{(s^2+1)\cdot(e^s)^2}+\frac{1}{(s^2+1)\cdot(e^s)^2}-\frac{2}{s\cdot(e^s)^2}-\frac{1}{s^2\cdot(e^s)^2}+\frac{1}{s^2}$
$\frac{2\cdot s}{(s^2+1)\cdot(e^s)^2}+\frac{1}{(s^2+1)\cdot(e^s)^2}-\frac{2}{s\cdot(e^s)^2}-\frac{1}{s^2\cdot(e^s)^2}+\frac{1}{s^2}$	$\left(\frac{2\cdot s+1}{s^2+1}-\frac{2}{s}-\frac{1}{s^2}\right)\cdot e^{-2\cdot s}+\frac{1}{s^2}$

On utilisera **P2**, puis **P22** $a=2$ et

$$F(s)=2\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s^2+1}-\frac{2}{s}-\frac{1}{s^2}$$

$\Rightarrow f(t)=2\cos(t)+\sin(t)-2-t$ **P6** et **P7** $\omega=1$, **P1** et **P2**

$\Rightarrow f(t-2)=2\cos(t-2)+\sin(t-2)-2-(t-2)$

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}\{Y\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}+\left(2\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s^2+1}-\frac{2}{s}-\frac{1}{s^2}\right)\cdot e^{-2s}\right\}$$

$$\boxed{y(t)=t+\left(2\cos(t-2)+\sin(t-2)-t\right)\cdot u(t-2)}$$

g) On prend la T.L. de l'É.D., avec $\mathscr{L}\{y\}=Y$

donc $\mathscr{L}\{y''\}=s^2Y-s\,y(0)-y'(0)=s^2Y-3s+1$ **P17**

on calcule $\mathscr{L}\{\delta(t-\pi)\}=e^{-\pi s}$ **P15**

$$\mathscr{L}\{y''+y\}=\mathscr{L}\{\delta(t-\pi)\}$$

$$s^2Y-3s+1+Y=e^{-\pi s}$$

$$Y=\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}+3\frac{s}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+1}$$

$\operatorname{solve}\left(s^2\cdot y-3\cdot s+1+y=e^{-\pi\cdot s},y\right)$	$y=\frac{\left((3\cdot s-1)\cdot e^{\pi\cdot s}+1\right)\cdot e^{-\pi\cdot s}}{s^2+1}$
$\operatorname{expand}\left(\frac{\left((3\cdot s-1)\cdot e^{\pi\cdot s}+1\right)\cdot e^{-\pi\cdot s}}{s^2+1}\right)$	$\frac{1}{(s^2+1)\cdot e^{\pi\cdot s}}+\frac{3\cdot s}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+1}$
$\frac{1}{(s^2+1)\cdot e^{\pi\cdot s}}+\frac{3\cdot s}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+1}$	$\frac{e^{-\pi\cdot s}}{s^2+1}+\frac{3\cdot s-1}{s^2+1}$

$$\mathscr{L}^{-1}\{Y\}=\sin(t-\pi)\cdot u(t-\pi)+3\cos(t)-\sin(t)$$

P22 $a=\pi$, $F(s)=\frac{1}{s^2+1}\Rightarrow f(t)=\sin(t)$ **P6** $\omega=1$, puis **P7** et **P6** $\omega=1$

$$\boxed{y(t)=3\cos(t)-\sin(t)-\sin(t)\cdot u(t-\pi)}$$

h) On prend la T.L. de l'É.D., avec $\mathscr{L}\{y\} = Y$

donc $\mathscr{L}\{y'\} = sY - y(0) = sY - 2$ **P16**

et $\mathscr{L}\{y''\} = s^2Y - s\,y(0) - y'(0) = s^2Y - 2s + 2$ **P17**

on calcule $\mathscr{L}\{\delta(t-1) - \delta(t-2)\} = e^{-s} - e^{-2s}$ **P15** $a = 1$ puis $a = 2$

$$\mathscr{L}\{y''\} + 2\mathscr{L}\{y'\} - 3\mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{\delta(t-1)\} - \mathscr{L}\{\delta(t-2)\}$$

$$s^2Y - 2s + 2 + 2(s\cdot Y - 2) - 3Y = e^{s} - e^{-2s}$$

$$Y = \frac{1}{s+3} + \frac{1}{s-1} + e^{-s}\left(\frac{1}{4(s-1)} - \frac{1}{4(s+3)}\right) + e^{-2s}\left(\frac{1}{4(s+3)} - \frac{1}{4(s-1)}\right)$$

$$\text{solve}\left(s^2\cdot y - 2\cdot s + 2 + 2\cdot(s\cdot y - 2) - 3\cdot y = e^{-s} - e^{-2\cdot s}, y\right) \quad y = \frac{e^{-2\cdot s}\cdot\left(2\cdot(s+1)\cdot e^{2\cdot s} + e^{s} - 1\right)}{s^2 + 2\cdot s - 3}$$

$$\text{expand}\left(\frac{e^{-2\cdot s}\cdot\left(2\cdot(s+1)\cdot e^{2\cdot s} + e^{s} - 1\right)}{s^2 + 2\cdot s - 3}\right) \quad \frac{-1}{4\cdot(s+3)\cdot e^{s}} + \frac{1}{4\cdot(s-1)\cdot e^{s}} + \frac{1}{4\cdot(s+3)\cdot\left(e^{s}\right)^2} - \frac{1}{4\cdot(s-1)\cdot\left(e^{s}\right)^2} + \frac{1}{s+3} + \frac{1}{s-1}$$

$$\frac{-1}{4\cdot(s+3)\cdot e^{s}} + \frac{1}{4\cdot(s-1)\cdot e^{s}} + \frac{1}{4\cdot(s+3)\cdot\left(e^{s}\right)^2} - \frac{1}{4\cdot(s-1)\cdot\left(e^{s}\right)^2} + \frac{1}{s+3} + \frac{1}{s-1}$$

$$\left(\frac{1}{4\cdot(s-1)} - \frac{1}{4\cdot(s+3)}\right)\cdot e^{-s} + \left(\frac{1}{4\cdot(s+3)} - \frac{1}{4\cdot(s-1)}\right)\cdot e^{-2\cdot s} + \frac{1}{s+3} + \frac{1}{s-1}$$

P4 $a = 3$ et $a = -1$

P22 $a = 1$ $F_1(s) = \dfrac{1}{4(s-1)} - \dfrac{1}{4(s+3)} \Rightarrow f_1(t) = \dfrac{1}{4}\left(e^{t} - e^{-3t}\right)$ **P4** $a = -1$ et $a = 3$

P22 $a = 3$ $F_2(s) = \dfrac{1}{4(s+3)} - \dfrac{1}{4(s-1)} \Rightarrow f_2(t) = \dfrac{1}{4}\left(e^{-3t} - e^{t}\right)$ **P4** $a = 3$ et $a = -1$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\{Y\} &= e^{-3t} + e^{t} + f_1(t-1)\cdot u(t-1) + f_2(t-2)\cdot u(t-2)\\ &= e^{-3t} + e^{t} + \frac{1}{4}\left(e^{t-1} - e^{-3(t-1)}\right)\cdot u(t-1) + \frac{1}{4}\left(e^{-3(t-2)} - e^{t-2}\right)\cdot u(t-2)\end{aligned}$$

$$\boxed{y(t) = e^{-3t} + e^{t} + \frac{1}{4}\left(e^{t-1} - e^{-3t+3}\right)\cdot u(t-1) + \frac{1}{4}\left(e^{-3t+6} - e^{t-2}\right)\cdot u(t-2)}$$

i) On prend la T.L. de l'É.D., avec $\mathscr{L}\{y\} = Y$

donc $\mathscr{L}\{y''\} = s^2Y - s\,y(0) - y'(0) = s^2Y - 1$ **P17**

on a $h(t) = \sin(2t)\cdot u(t) - \sin(2t)\cdot u(t-\pi) \Rightarrow H(s) = \dfrac{2}{s^2+4} - e^{-\pi s}\dfrac{2}{s^2+4}$

P6 $\omega = 2$, puis P21 $a = \pi$ et $g(t) = \sin(2t) \Rightarrow g(t+\pi) = \sin(2t + 2\pi) = \sin(2t)$

$$\mathscr{L}\{y''\} + 4\mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{\sin(2t)u(t)\} - \mathscr{L}\{\sin(2t)u(t-\pi)\}$$

$$s^2Y - 1 + 4Y = \frac{2}{s^2+4} - \frac{2e^{-\pi s}}{s^2+4}$$

$$Y=\frac{s^2+6}{\left(s^2+4\right)^2}-\frac{2e^{-\pi s}}{\left(s^2+4\right)^2}$$

$\text{solve}\left(s^2\cdot y-1+4\cdot y=\frac{2}{s^2+4}-\frac{2\cdot e^{-\pi\cdot s}}{s^2+4},y\right)$	$y=\frac{\left(\left(s^2+6\right)\cdot e^{\pi\cdot s}-2\right)\cdot e^{-\pi\cdot s}}{\left(s^2+4\right)^2}$
$\text{expand}\left(\frac{\left(\left(s^2+6\right)\cdot e^{\pi\cdot s}-2\right)\cdot e^{-\pi\cdot s}}{\left(s^2+4\right)^2}\right)$	$\frac{-2}{\left(s^2+4\right)^2\cdot e^{\pi\cdot s}}+\frac{s^2}{\left(s^2+4\right)^2}+\frac{6}{\left(s^2+4\right)^2}$
$\frac{-2}{\left(s^2+4\right)^2\cdot e^{\pi\cdot s}}+\frac{s^2}{\left(s^2+4\right)^2}+\frac{6}{\left(s^2+4\right)^2}$	$\frac{s^2+6}{\left(s^2+4\right)^2}-\frac{2\cdot e^{-\pi\cdot s}}{\left(s^2+4\right)^2}$

Ici il faut ajuster. À cause du $\left(s^2+4\right)^2$ au dénominateur, on ne veut pas avoir de s^2 au numérateur.

$$Y=\frac{s^2+6}{\left(s^2+4\right)^2}-\frac{2e^{-\pi s}}{\left(s^2+4\right)^2}=\frac{s^2+4+2}{\left(s^2+4\right)^2}-\frac{2e^{-\pi s}}{\left(s^2+4\right)^2}=\frac{s^2+4}{\left(s^2+4\right)^2}+\frac{2}{\left(s^2+4\right)^2}-\frac{2e^{-\pi s}}{\left(s^2+4\right)^2}$$

$$Y=\frac{1}{s^2+4}+\frac{2}{\left(s^2+4\right)^2}-\frac{2e^{-\pi s}}{\left(s^2+4\right)^2}$$

P27 et P29 $\omega=2$ puis P22 $a=\pi$ et P29 $\omega=2$ pour $F(s)=\frac{2}{\left(s^2+4\right)^2}$

$$\Rightarrow f(t)=\frac{2}{2\cdot 8}\left(\sin(2t)-2t\cos(2t)\right)$$

$$\Rightarrow f(t-\pi)=\frac{1}{8}\left(\sin(2t)-2(t-\pi)\cos(2t)\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y\}=\frac{1}{2}\sin(2t)+\frac{1}{8}\sin(2t)-\frac{2}{8}t\cos(2t)+\frac{1}{8}\left(\sin(2t)-2(t-\pi)\cos(2t)\right)\cdot u(t-\pi)$$

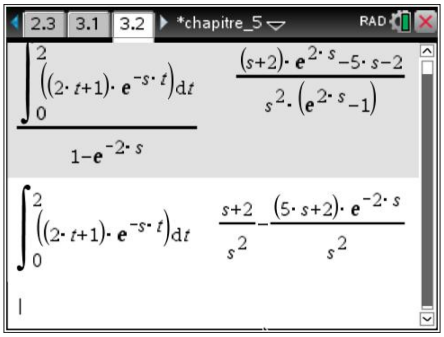
$$\boxed{y(t)=\frac{5}{8}\sin(2t)-\frac{1}{4}t\cos(2t)+\frac{1}{8}\left(\sin(2t)-2(t-\pi)\cos(2t)\right)\cdot u(t-\pi)}$$

5.17- Il faut montrer que $\mathcal{L}\{g(t)\cdot u(t-a)\}=e^{-as}\mathcal{L}\{g(t+a)\}$

Calculez $\mathcal{L}\{g(t)\cdot u(t-a)\}=\int_0^\infty g(t)\cdot u(t-a)\cdot e^{-st}dt$

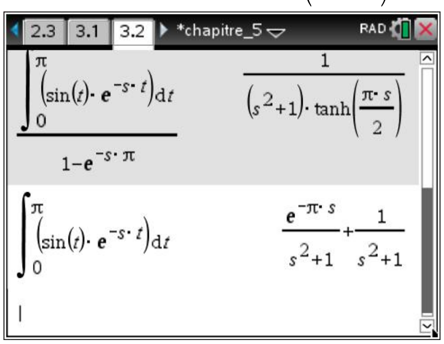
et posez le changement de variable $r=t-a$ pour évaluer l'intégrale.

5.18-a) $\mathcal{L}\{f(t)\}=\dfrac{\int_0^2(2t+1)\cdot e^{-st}dt}{1-e^{-2s}}=\dfrac{(s+2)\cdot e^{2s}-5s-2}{s^2\cdot\left(e^{2s}-1\right)}$



b) $$\mathscr{L}\left\{\left|\sin(t)\right|\right\}=\frac{\int_0^{\pi}\sin(t)\cdot e^{-st}dt}{1-e^{-s\pi}}=\frac{\frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}}{1-e^{-\pi s}}=\frac{1+e^{-\pi s}}{\left(s^2+1\right)\cdot\left(1-e^{-\pi s}\right)}$$

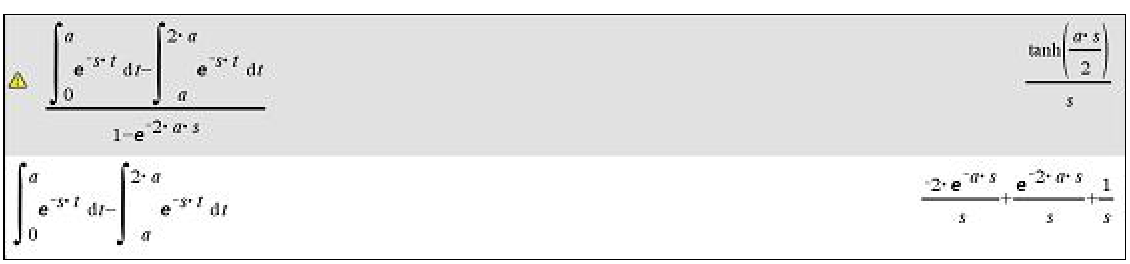
$$=\frac{1}{\left(s^2+1\right)\cdot\tanh\left(\pi s/2\right)}$$



c) $$f(t)=\begin{cases}1 & \text{si } 0<t<a\\ -1 & \text{si } a<t<2a\end{cases};\ P=2a$$

$$\mathscr{L}\left\{f(t)\right\}=\frac{\int_0^{2a}f(t)\cdot e^{-st}dt}{1-e^{-2as}}=\frac{\int_0^{a}1\cdot e^{-st}dt+\int_a^{2a}-1\cdot e^{-st}dt}{1-e^{-2as}}$$

$$=\frac{1-2e^{-as}+e^{-2as}}{s\cdot\left(1-e^{-2as}\right)}=\frac{\tanh\left(as/2\right)}{s}$$

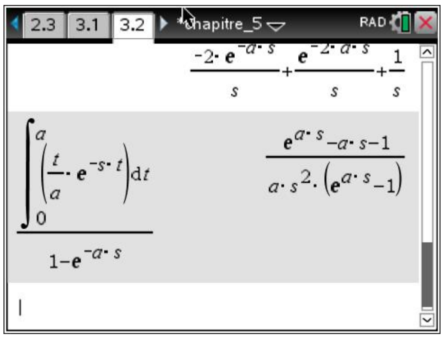


d) $f(t)=\dfrac{1}{a}t$ si $0<t<a$; $P=a$

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{\displaystyle\int_0^a \frac{t}{a} \cdot e^{-st}\,dt}{1-e^{-as}} = \frac{e^{as} - a \cdot s - 1}{a \cdot s^2 \cdot \left(e^{as} - 1\right)}$$

Pour avoir la réponse du manuel :

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{e^{as} - a \cdot s - 1}{a \cdot s^2 \cdot \left(e^{as} - 1\right)} \cdot \frac{e^{-as}}{e^{-as}} = \frac{\left(e^{as} - a \cdot s - 1\right) \cdot e^{-as}}{a \cdot s^2 \cdot \left(1 - e^{-as}\right)}$$



retour au début du chapitre 5

Section 5.4

5.19-a) $f(w)=w$ et $g(t-w)=2$

$$t*2=\int_0^t w\cdot 2dw=t^2$$

b) $$t*e^{-5t}=\int_0^t w\cdot e^{-5(t-w)}dw=\frac{e^{-5t}}{25}+\frac{t}{5}-\frac{1}{25}$$

$\int_0^t \left(w\cdot e^{-5\cdot(t-w)}\right)dw$	$\frac{e^{-5\cdot t}\cdot\left((5\cdot t-1)\cdot e^{5\cdot t}+1\right)}{25}$
$\text{propFrac}\left(\frac{e^{-5\cdot t}\cdot\left((5\cdot t-1)\cdot e^{5\cdot t}+1\right)}{25}\right)$	$\frac{e^{-5\cdot t}}{25}+\frac{t}{5}-\frac{1}{25}$

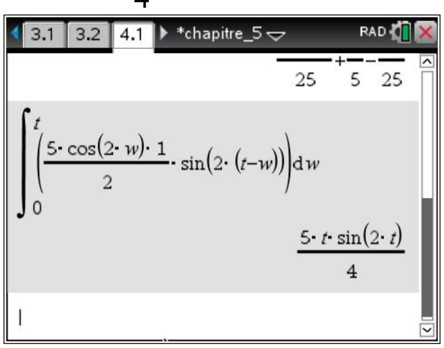
c) $$1*\sin(t)=\int_0^t 1\cdot\sin(t-w)dw=1-\cos(t)$$

5.20-a) $$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5s}{\left(s^2+4\right)^2}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5s}{s^2+4}\cdot\frac{1}{s^2+4}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5s}{s^2+4}\right\}*\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}$$

$$=5\cos(2t)*\frac{1}{2}\sin(2t)\quad \textbf{P7}\text{ et }\textbf{P27}\ \ \omega=2$$

$$=\int_0^t 5\cos(2w)\cdot\frac{1}{2}\sin\left(2(t-w)\right)dw$$

$$=\frac{5}{4}t\cdot\sin(2t)$$



b) $$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{\left(s^2+1\right)^3}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{s}{\left(s^2+1\right)^2}\right\}=\sin(t)*\frac{1}{2}t\sin(t)\quad \textbf{P27}\text{ et }\textbf{P30}\ \ \omega=1$$

$$=\int_0^t\sin(w)\cdot\frac{1}{2}(t-w)\sin(t-w)dw=\frac{1}{8}t\sin(t)-\frac{1}{8}t^2\cos(t)$$

$$\int_0^t \left(\frac{\sin(w)\cdot 1}{2}\cdot(t-w)\cdot\sin(t-w)\right)dw \qquad \frac{-t\cdot(t\cdot\cos(t)-\sin(t))}{8}$$

$$\text{expand}\left(\frac{-t\cdot(t\cdot\cos(t)-\sin(t))}{8}\right) \qquad \frac{t\cdot\sin(t)}{8}-\frac{t^2\cdot\cos(t)}{8}$$

c) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2}{s^2(s+3)^2}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2}{s^2}\cdot\dfrac{1}{(s+3)^2}\right\}=2t*t\cdot e^{-3t}$ **P2** et **P5** $a=3$

$$=\int_0^t 2w\cdot(t-w)e^{-3(t-w)}dw=\left(\frac{2t}{9}+\frac{4}{27}\right)\cdot e^{-3t}+\frac{2t}{9}-\frac{4}{27}$$

$$\int_0^t \left(2\cdot w\cdot(t-w)\cdot e^{-3\cdot(t-w)}\right)dw \qquad \frac{2\cdot e^{-3\cdot t}\cdot\left((3\cdot t-2)\cdot e^{3\cdot t}+3\cdot t+2\right)}{27}$$

$$\text{propFrac}\left(\frac{2\cdot e^{-3\cdot t}\cdot\left((3\cdot t-2)\cdot e^{3\cdot t}+3\cdot t+2\right)}{27}\right) \qquad \left(\frac{2\cdot t}{9}+\frac{4}{27}\right)\cdot e^{-3\cdot t}+\frac{2\cdot t}{9}-\frac{4}{27}$$

5.21-a) On prend la T.L. de l'É.D., avec $\mathscr{L}\{y\}=Y$

donc $\mathscr{L}\{y''\}=s^2Y-s\,y(0)-y'(0)=s^2Y$ **P17**

$\mathscr{L}\{y''\}+9\mathscr{L}\{y\}=\mathscr{L}\{g(t)\}$, disons $\mathscr{L}\{g(t)\}=G(s)$

$s^2Y+9Y=G(s)\Rightarrow Y=\dfrac{1}{s^2+9}\cdot G(s)$

$\mathscr{L}^{-1}\{Y\}=\dfrac{1}{3}\sin(3t)*g(t)$ **P27** $\omega=3$

$$\boxed{y(t)=\int_0^t \frac{1}{3}\sin(3w)\cdot g(t-w)\,dw}$$

b) On prend la T.L. de l'É.D., avec $\mathscr{L}\{x\}=X$

donc $\mathscr{L}\{x'\}=s\,X-x(0)=s\,X$ **P16**

et $\mathscr{L}\{x''\}=s^2X-s\,x(0)-x'(0)=s^2X$ **P17**

$\mathscr{L}\{x''\}+2\mathscr{L}\{x'\}+5\mathscr{L}\{x\}=G(s)$

$s^2X+2s\,X+5X=\mathscr{L}\{g(t)\}\Rightarrow X=\dfrac{1}{s^2+2s+5}\cdot G(s)=\dfrac{1}{(s+1)^2+4}\cdot G(s)$

$\mathscr{L}^{-1}\{X\}=\dfrac{1}{2}e^{-t}\sin(2t)*g(t)$ **P28** $a=1$ $\omega=2$

$$\boxed{x(t)=\int_0^t \frac{1}{2}e^{-w}\sin(w)\cdot g(t-w)\,dw}$$

5.22-a) $y(t)=\int_0^t \frac{1}{3}\sin(3w)\cdot 2e^{-(t-w)}dw$

$$\boxed{y(t)=\frac{1}{15}\sin(3t)-\frac{1}{5}\cos(3t)+\frac{1}{5}e^{-t}}$$

$\int_0^t \left(\frac{1}{3}\cdot\sin(3\cdot w)\cdot 2\cdot e^{-(t-w)}\right)dw$	$\frac{e^{-t}\cdot\left(\sqrt{10}\cdot e^{t}\cdot\sin\left(3\cdot t+\frac{2\cdot\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)-\pi}{2}\right)+3\right)}{15}$
$\int_0^t \left(\frac{1}{a}\cdot\sin(a\cdot w)\cdot 2\cdot e^{-(t-w)}\right)dw$	$\frac{-2\cdot\cos(a\cdot t)}{a^2+1}+\frac{2\cdot\sin(a\cdot t)}{a\cdot(a^2+1)}+\frac{2\cdot e^{-t}}{a^2+1}$
$\frac{-2\cdot\cos(a\cdot t)}{a^2+1}+\frac{2\cdot\sin(a\cdot t)}{a\cdot(a^2+1)}+\frac{2\cdot e^{-t}}{a^2+1}\vert a=3$	$\frac{-\cos(3\cdot t)}{5}+\frac{\sin(3\cdot t)}{15}+\frac{e^{-t}}{5}$

Remarquez qu'on a remplacé 3 par a pour simplifier la réponse.

b) $x(t)=\int_0^t \frac{1}{2}e^{-w}\sin(w)\cdot 2e^{-(t-w)}dw$

$$\boxed{x(t)=\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-t}\cdot\cos(2t)}$$

$\int_0^t \left(\frac{1}{2}\cdot e^{-w}\cdot\sin(2\cdot w)\cdot 2\cdot e^{-(t-w)}\right)dw$	$\frac{-e^{-t}\cdot(\cos(2\cdot t)-1)}{2}$
$\text{propFrac}\left(\frac{-e^{-t}\cdot(\cos(2\cdot t)-1)}{2}\right)$	$\frac{e^{-t}}{2}-\frac{e^{-t}\cdot\cos(2\cdot t)}{2}$

retour au début du chapitre 5

Section 5.5

5.23-a) $\mathcal{L}\{x\} = X \Rightarrow \mathcal{L}\{x'\} = s \cdot X - x(0) = s \cdot X - 2$ **P16**

$\mathcal{L}\{y\} = Y \Rightarrow \mathcal{L}\{y'\} = s \cdot Y - y(0) = s \cdot Y + 1$ **P16**

On prend la T.L. de chaque É.D. :

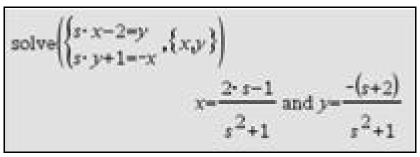
$\mathcal{L}\{x'\} = \mathcal{L}\{y\} \Rightarrow s\,X - 2 = Y$

$\mathcal{L}\{y'\} = \mathcal{L}\{-x\} \Rightarrow s\,Y + 1 = -X$

On résout pour X et Y et on obtient

$$X = 2\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow \boxed{x(t) = 2\cos(t) - \sin(t)}$$ **P6** et **P7** $\omega = 1$

$$Y = \frac{-s}{s^2+1} - \frac{2}{s^2+1} \Rightarrow \boxed{y(t) = -\cos(t) - 2\sin(t)}$$ **P6** et **P7** $\omega = 1$



b) $\mathcal{L}\{i_1\} = I_1 \Rightarrow \mathcal{L}\{i_1'\} = s \cdot I_1 - i_1(0) = s\,I_1 + 1$

$\mathcal{L}\{i_2\} = I_2 \Rightarrow \mathcal{L}\{i_2'\} = s \cdot I_2 - i_2(0) = s\,I_2 - 2$

On prend la T.L. de chaque É.D. :

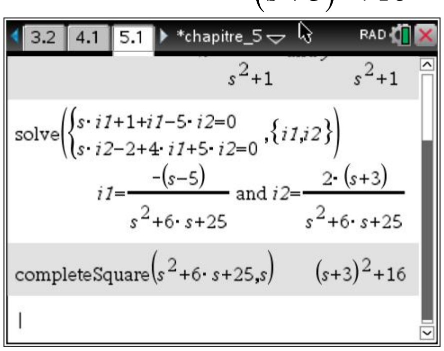
$\mathcal{L}\{i_1'\} + \mathcal{L}\{i_1\} - 5\mathcal{L}\{i_2\} = \mathcal{L}\{0\} \Rightarrow s\,I_1 + 1 + I_1 - 5I_2 = 0$

$\mathcal{L}\{i_2'\} + 4\mathcal{L}\{i_1\} + 5\mathcal{L}\{i_2\} = \mathcal{L}\{0\} \Rightarrow s\,I_2 - 2 + 4I_1 + 5I_2 = 0$

On résout pour I_1 et I_2 et on complète le carré :

$$I_1 = \frac{-s+5}{s^2+6s+25} = \frac{-(s+3)+8}{(s+3)^2+16} = -\frac{s+3}{(s+3)^2+16} + 2\frac{4}{(s+3)^2+16}$$

$$I_2 = \frac{2(s+3)}{s^2+6s+25} = \frac{2(s+3)}{(s+3)^2+16} = 2\frac{s+3}{(s+3)^2+16}$$



$\mathscr{L}^{-1}\{I_1\} = \boxed{i_1(t) = 2e^{-3t}\sin(4t) - e^{-3t}\cos(4t)}$ **P8** et **P9** $a = 3 \quad \omega = 4$

$\mathscr{L}^{-1}\{I_2\} = \boxed{i_2(t) = 2e^{-3t}\cos(4t)}$ **P9** $a = 3 \quad \omega = 4$

c) $\mathscr{L}\{x\} = X \Rightarrow \mathscr{L}\{x'\} = s\cdot X - x(0) = s\cdot X$ **P16**

$\mathscr{L}\{y\} = Y \Rightarrow \mathscr{L}\{y'\} = s\cdot Y - y(0) = s\cdot Y - 1$ **P16**

On prend la T.L. de chaque É.D. :

$\mathscr{L}\{x'\} + 3\mathscr{L}\{y'\} + \mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{e^t\} \Rightarrow s\,X + 3(s\,Y - 1) + Y = \dfrac{1}{s-1}$ **P4** $a = -1$

$\mathscr{L}\{y'\} - \mathscr{L}\{x\} = \mathscr{L}\{y\} \Rightarrow s\,Y - 1 - X = Y$

On résout pour X et Y et on obtient

$$X = \frac{-3}{(s+1)^2}$$

$$Y = \frac{3}{4(s+1)} + \frac{3}{2(s+1)^2} + \frac{1}{4(s-1)}$$

$\text{solve}\left(\begin{cases} s\cdot x+3\cdot(s\cdot y-1)+y=\frac{1}{s-1} \\ s\cdot y-1-x=y \end{cases},\{x,y\}\right)$	$s-1\neq 0$ and $x=\frac{-3}{s^2+2\cdot s+1}$ and $y=\frac{s^2+2\cdot s-2}{s^3+s^2-s-1}$
$\text{expand}(x)\vert s-1\neq 0$ and $x=\frac{-3}{s^2+2\cdot s+1}$ and $y=\frac{s^2+2\cdot s-2}{s^3+s^2-s-1}$	$\frac{-3}{s^2+2\cdot s+1}$
$\text{factor}(s^2+2\cdot s+1)$	$(s+1)^2$
$\text{expand}(y)\vert s-1\neq 0$ and $x=\frac{-3}{s^2+2\cdot s+1}$ and $y=\frac{s^2+2\cdot s-2}{s^3+s^2-s-1}$	$\frac{3}{4\cdot(s+1)}+\frac{3}{2\cdot(s+1)^2}+\frac{1}{4\cdot(s-1)}$

$\mathscr{L}^{-1}\{X\} = \boxed{x(t) = -3t\,e^{-t}}$ **P5** $a = 1$

$\mathscr{L}^{-1}\{Y\} = \boxed{y(t) = \frac{3}{4}e^{-t} + \frac{3}{2}t\,e^{-t} + \frac{1}{4}e^{t}}$ **P4** et **P5** $a = 1$, puis **P4** $a = -1$

d) $\mathscr{L}\{x\} = X \Rightarrow \mathscr{L}\{x'\} = s\cdot X - x(0) = s\cdot X - 5$ **P16**

$\mathscr{L}\{y\} = Y \Rightarrow \mathscr{L}\{y'\} = s\cdot Y - y(0) = s\cdot Y + 1$ **P16**

On prend la T.L. de chaque É.D. :

$\mathscr{L}\{x'\} - 3\mathscr{L}\{x\} - 6\mathscr{L}\{y\} = 27\mathscr{L}\{t^2\} \Rightarrow s\,X - 5 - 3X - 6Y = 27\dfrac{2}{s^3}$ **P3** $n = 2$

$\mathscr{L}\{x'\} + \mathscr{L}\{y'\} - 3\mathscr{L}\{y\} = 5\mathscr{L}\{e^t\} \Rightarrow s\,X - 5 + s\,Y + 1 - 3Y = \dfrac{5}{s-1}$ **P4** $a = -1$

On résout pour X et Y et on obtient

$$X=\frac{3}{s-1}+\frac{2}{s}+\frac{6}{s^2}-\frac{18}{s^3}\Rightarrow \mathscr{L}^{-1}\{X\}=3e^t+2+6t-\frac{18}{2}t^2$$

P4 $a=-1$, **P1**, **P2**, **P25** $n=3$

$$Y=\frac{-1}{s-1}-\frac{6}{s^2}\Rightarrow \mathscr{L}^{-1}\{Y\}=-e^t-6t \quad \textbf{P4}\ a=-1,\ \textbf{P2}$$

$$\text{solve}\left(\begin{cases} s\cdot x-5-3\cdot x-6\cdot y=27\cdot\frac{2}{s^3} \\ s\cdot x-5+s\cdot y+1-3\cdot y=\frac{5}{s-1}\end{cases},\{x,y\}\right) \quad s-1\neq 0 \text{ and } s\neq 0 \text{ and } x=\frac{5\cdot s^3+4\cdot s^2-24\cdot s+18}{s^3\cdot(s-1)} \text{ and } y=\frac{-(s^2+6\cdot s-6)}{s^2\cdot(s-1)}$$

$$\text{expand}(x)|s-1\neq 0 \text{ and } s\neq 0 \text{ and } x=\frac{5\cdot s^3+4\cdot s^2-24\cdot s+18}{s^3\cdot(s-1)} \text{ and } y=\frac{-(s^2+6\cdot s-6)}{s^2\cdot(s-1)} \quad \frac{3}{s-1}+\frac{2}{s}+\frac{6}{s^2}-\frac{18}{s^3}$$

$$\text{expand}(y)|s-1\neq 0 \text{ and } s\neq 0 \text{ and } x=\frac{5\cdot s^3+4\cdot s^2-24\cdot s+18}{s^3\cdot(s-1)} \text{ and } y=\frac{-(s^2+6\cdot s-6)}{s^2\cdot(s-1)} \quad \frac{-1}{s-1}-\frac{6}{s^2}$$

$$\boxed{x(t)=3e^t+2+6t-9t^2}$$

$$\boxed{y(t)=-e^t-6t}$$

e) $\mathscr{L}\{x\}=X\Rightarrow \mathscr{L}\{x'\}=s\,X-x(0)=s\,X$ **P16**

et $\mathscr{L}\{x''\}=s^2X-s\cdot x(0)-x'(0)=s^2X-10$ **P17**

$\mathscr{L}\{y\}=Y\Rightarrow \mathscr{L}\{y'\}=s\cdot Y-y(0)=s\cdot Y-5$ **P16**

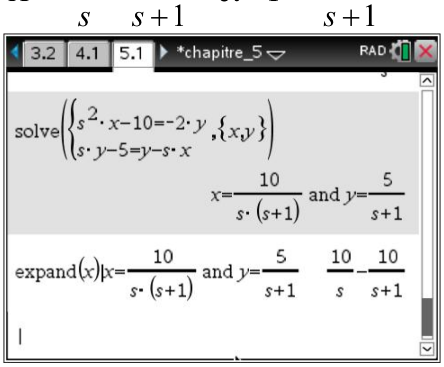
On prend la T.L. de chaque É.D. :

$\mathscr{L}\{x''\}=-2\mathscr{L}\{y\}\Rightarrow s^2\,X-10=-2Y$

$\mathscr{L}\{y'\}=\mathscr{L}\{y\}-\mathscr{L}\{x'\}\Rightarrow s\,Y-5=Y-(s\,X)$

On résout pour X et Y et on obtient

$X=\frac{10}{s}-\frac{10}{s+1}$ et $Y=\frac{5}{s+1}$



avec **P1** et **P4** $a=1$, $\boxed{x(t)=10-10e^{-t}}$ $\boxed{y(t)=5e^{-t}}$

f) $\mathscr{L}\{x\}=X\Rightarrow \mathscr{L}\{x'\}=s\,X-x(0)=s\,X$ **P16**

et $\mathscr{L}\{x''\} = s^2 X - s \cdot x(0) - x'(0) = s^2 X - 1$ **P17**

$\mathscr{L}\{y\} = Y \Rightarrow \mathscr{L}\{y'\} = s \cdot Y - y(0) = s \cdot Y - 2$ **P16**

et $\mathscr{L}\{y''\} = s^2 Y - s \cdot y(0) - y'(0) = s^2 Y - 2s + 3$ **P17**

On prend la T.L. de chaque É.D. :

$\mathscr{L}\{y''\} = \mathscr{L}\{x\} - \mathscr{L}\{2\} \Rightarrow s^2\, Y - 2s + 3 = X - \dfrac{2}{s}$ **P1**

$\mathscr{L}\{x''\} = \mathscr{L}\{y\} + \mathscr{L}\{2\} \Rightarrow s^2 X - 1 = Y + \dfrac{2}{s}$ **P1**

On résout pour X et Y et on obtient

$$X = \frac{2}{s^2+1} - \frac{3s}{s^2+1} + \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s} \Rightarrow \boxed{x(t) = 2\sin(t) - 3\cos(t) + e^{-t} + 2}$$

$$Y = \frac{3s}{s^2+1} - \frac{2}{s^2+1} + \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s} \Rightarrow \boxed{y(t) = 3\cos(t) - 2\sin(t) + e^{-t} - 2}$$

avec **P6** et **P7** $\omega = 1$, **P4** $a = 1$ et **P1**

$\text{solve}\left(\begin{cases} s^2\cdot y - 2\cdot s + 3 = x - \frac{2}{s} \\ s^2\cdot x - 1 = y + \frac{2}{s} \end{cases}, \{x,y\}\right)$	$s \neq 0$ and $x = \frac{s^2+5\cdot s+2}{s\cdot(s+1)\cdot(s^2+1)}$ and $y = \frac{2\cdot s^3 - s^2 - 3\cdot s - 2}{s\cdot(s^3+s^2+s+1)}$
$\text{expand}(x)\vert s\neq 0$ and $x = \frac{s^2+5\cdot s+2}{s\cdot(s+1)\cdot(s^2+1)}$ and $y = \frac{2\cdot s^3 - s^2 - 3\cdot s - 2}{s\cdot(s^3+s^2+s+1)}$	$\frac{-3\cdot s}{s^2+1} + \frac{2}{s^2+1} + \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s}$
$\text{expand}(y)\vert s\neq 0$ and $x = \frac{s^2+5\cdot s+2}{s\cdot(s+1)\cdot(s^2+1)}$ and $y = \frac{2\cdot s^3 - s^2 - 3\cdot s - 2}{s\cdot(s^3+s^2+s+1)}$	$\frac{3\cdot s}{s^2+1} - \frac{2}{s^2+1} + \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s}$

g) $\mathscr{L}\{x\} = X \Rightarrow \mathscr{L}\{x'\} = s\,X - x(0) = s\,X - 2$ **P16**

et $\mathscr{L}\{x''\} = s^2 X - s \cdot x(0) - x'(0) = s^2 X - 2s + 1$ **P17**

$\mathscr{L}\{y\} = Y \Rightarrow \mathscr{L}\{y'\} = s \cdot Y - y(0) = s \cdot Y + 1$ **P16**

et $\mathscr{L}\{y''\} = s^2 Y - s \cdot y(0) - y'(0) = s^2 Y + s$ **P17**

On prend la T.L. de chaque É.D. :

$\mathscr{L}\{x'\} - \mathscr{L}\{y''\} = 4\mathscr{L}\{e^{-2t}\} \Rightarrow s \cdot X - 2 - \left(s^2 Y + s\right) = \dfrac{4}{s+2}$ **P4** $a = 2$

$\mathscr{L}\{x''\} + 3\mathscr{L}\{y'\} - 4\mathscr{L}\{x\} = \mathscr{L}\{2\} \Rightarrow s^2 X - 2s + 1 + 3(s\,Y + 1) - 4X = \dfrac{2}{s}$ **P1**

Ici on va résoudre avec les matrices. Il faut donc séparer les termes; il faut garder ce qui contient du X et du Y à gauche du signe d'égalité, et tout le reste à droite.

$$s \cdot X - s^2 Y = \frac{4}{s+2} + 2 + s$$

$$s^2 X + 3s \cdot Y - 4X = \frac{2}{s} + 2s - 1 - 3 \Rightarrow \left(s^2 - 4\right) X + 3s\,Y = \frac{2}{s} + 2s - 4$$

On obtient donc l'équation matricielle

$$\begin{bmatrix} s & -s^2 \\ s^2-4 & 3s \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{4}{s+2}+2+s \\ \dfrac{2}{s}+2s-4 \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s & -s^2 \\ s^2-4 & 3s \end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} \dfrac{4}{s+2}+2+s \\ \dfrac{2}{s}+2s-4 \end{bmatrix}$$

Ça nous donne $X=\dfrac{23}{2(s+1)}-\dfrac{2}{s+2}+\dfrac{13}{2(s-1)}-\dfrac{14}{s}$

$Y=\dfrac{13}{2(s-1)}-\dfrac{23}{2(s+1)}-\dfrac{18}{s^2}+\dfrac{4}{s}$

$$\begin{bmatrix} s & -s^2 \\ s^2-4 & 3\cdot s \end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} \dfrac{4}{s+2}+2+s \\ \dfrac{2}{s}+2\cdot s-4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \dfrac{2\cdot s^3+3\cdot s^2+6\cdot s+28}{s\cdot(s-1)\cdot(s+1)\cdot(s+2)} \\ \dfrac{-(s^3+4\cdot s-18)}{s^2\cdot(s-1)\cdot(s+1)} \end{bmatrix}$$

$$\text{expand}\left(\begin{bmatrix} \dfrac{2\cdot s^3+3\cdot s^2+6\cdot s+28}{s\cdot(s-1)\cdot(s+1)\cdot(s+2)} \\ \dfrac{-(s^3+4\cdot s-18)}{s^2\cdot(s-1)\cdot(s+1)} \end{bmatrix}\right) \qquad \begin{bmatrix} \dfrac{-2}{s+2}+\dfrac{23}{2\cdot(s+1)}+\dfrac{13}{2\cdot(s-1)}-\dfrac{14}{s} \\ \dfrac{-23}{2\cdot(s+1)}+\dfrac{13}{2\cdot(s-1)}+\dfrac{4}{s}-\dfrac{18}{s^2} \end{bmatrix}$$

Il ne reste qu'à prendre les transformées inverses.

$\boxed{x(t)=\dfrac{23}{2}e^{-t}-2e^{-2t}+\dfrac{13}{2}e^{t}-14}$ **P4** $a=1$, $a=2$, $a=-1$, et **P1**

$\boxed{y(t)=\dfrac{13}{2}e^{t}-\dfrac{23}{2}e^{-t}-18t+4}$ **P4** $a=-1$, $a=1$, **P2** et **P1**

5.24-a) On peut écrire le système d'équations :

$$\begin{cases} \dfrac{dq_1}{dt}+\dfrac{1}{25}q_1-\dfrac{2}{125}q_2=\dfrac{12}{5} \\ \dfrac{dq_2}{dt}-\dfrac{1}{25}q_1+\dfrac{1}{25}q_2=0 \end{cases}$$

On prend la T.L. de chaque É.D. avec

$\mathscr{L}\{q_1\}=Q_1\Rightarrow\mathscr{L}\{q_1'\}=s\cdot Q_1$ et $\mathscr{L}\{q_2\}=Q_2\Rightarrow\mathscr{L}\{q_2'\}=s\cdot Q_2$ puisque les conditions initiales sont nulles.

$\mathscr{L}\{q_1'\}+\dfrac{1}{25}\mathscr{L}\{q_1\}-\dfrac{2}{125}\mathscr{L}\{q_2\}=\mathscr{L}\left\{\dfrac{12}{5}\right\}\Rightarrow s\cdot Q_1+\dfrac{1}{25}Q_1-\dfrac{2}{125}Q_2=\dfrac{12}{5s}$ **P1**

$\mathscr{L}\{q_2'\}-\dfrac{1}{25}\mathscr{L}\{q_1\}+\dfrac{1}{25}\mathscr{L}\{q_2\}=\mathscr{L}\{0\}\Rightarrow s\cdot Q_2-\dfrac{1}{25}Q_1+\dfrac{1}{25}Q_2=0$

Réécrivons ces dernières équations pour les traiter sous forme matricielle :

$\left(s+\dfrac{1}{25}\right)\cdot Q_1-\dfrac{2}{125}Q_2=\dfrac{12}{5s}$ et $-\dfrac{1}{25}Q_1+\left(s+\dfrac{1}{25}\right)Q_2=0$

$$\begin{bmatrix} s+\frac{1}{25} & \frac{-2}{125} \\ \frac{-1}{25} & s+\frac{1}{25} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 5s \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+\frac{1}{25} & \frac{-2}{125} \\ \frac{-1}{25} & s+\frac{1}{25} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 12 \\ 5s \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s+\frac{1}{25} & \frac{-2}{125} \\ \frac{-1}{25} & s+\frac{1}{25} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 12 \\ 5\cdot s \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \frac{300\cdot(25\cdot s+1)}{s\cdot(3125\cdot s^2+250\cdot s+3)} \\ \frac{300}{s\cdot(3125\cdot s^2+250\cdot s+3)} \end{bmatrix}$$

$$\text{expand}\left(\begin{bmatrix} \frac{300\cdot(25\cdot s+1)}{s\cdot(3125\cdot s^2+250\cdot s+3)} \\ \frac{300}{s\cdot(3125\cdot s^2+250\cdot s+3)} \end{bmatrix},s\right) \qquad \begin{bmatrix} \frac{-1250\cdot(\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}+5)}{125\cdot s-\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}+5}+\frac{1250\cdot(\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}-5)}{125\cdot s+\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}+5}+\frac{100}{s} \\ \frac{-3125\cdot(\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}+2)}{125\cdot s-\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}+5}+\frac{3125\cdot(\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}-2)}{125\cdot s+\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}+5}+\frac{100}{s} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-1250\cdot(\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}+5)}{125\cdot s-\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}+5}+\frac{1250\cdot(\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}-5)}{125\cdot s+\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}+5}+\frac{100}{s} \\ \frac{-3125\cdot(\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}+2)}{125\cdot s-\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}+5}+\frac{3125\cdot(\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}-2)}{125\cdot s+\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}+5}+\frac{100}{s} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \frac{-1250\cdot(\sqrt{10}+5)}{125\cdot s-\sqrt{10}+5}+\frac{1250\cdot(\sqrt{10}-5)}{125\cdot s+\sqrt{10}+5}+\frac{100}{s} \\ \frac{-3125\cdot(\sqrt{10}+2)}{125\cdot s-\sqrt{10}+5}+\frac{3125\cdot(\sqrt{10}-2)}{125\cdot s+\sqrt{10}+5}+\frac{100}{s} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-1250\cdot(\sqrt{10}+5)}{125\cdot s-\sqrt{10}+5}+\frac{1250\cdot(\sqrt{10}-5)}{125\cdot s+\sqrt{10}+5}+\frac{100}{s} \\ \frac{-3125\cdot(\sqrt{10}+2)}{125\cdot s-\sqrt{10}+5}+\frac{3125\cdot(\sqrt{10}-2)}{125\cdot s+\sqrt{10}+5}+\frac{100}{s} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \frac{-18.3772}{s+0.065298}-\frac{81.6228}{s+0.014702}+\frac{100.}{s} \\ \frac{29.0569}{s+0.065298}-\frac{129.057}{s+0.014702}+\frac{100.}{s} \end{bmatrix}$$

$$Q_1 = \frac{-1250\left(\sqrt{10}+5\right)}{125s-\sqrt{10}+5} - \frac{1250\left(\sqrt{10}-5\right)}{125s+\sqrt{10}+5} + \frac{100}{s} = \frac{-18,3772}{s+0,0653} - \frac{81,6228}{s+0,0147} + \frac{100}{s}$$

$$Q_2 = \frac{3125\left(\sqrt{10}-2\right)}{125s+\sqrt{10}+5} - \frac{3125\left(\sqrt{10}+2\right)}{125s-\sqrt{10}+5} + \frac{100}{s} = \frac{29,0569}{s+0,0653} - \frac{129,057}{s+0,0147} + \frac{100}{s}$$

On va le prendre en décimales parce que ça me semble plus simple à écrire...

$\boxed{q_1(t) = -18,3772e^{-0,0653t} - 81,6228e^{-0,0147t} + 100}$ **P4** $a = 0,0653$ et $a = 0,0147$, **P1**

$\boxed{q_2(t) = 29,0569e^{-0,0653t} - 129,057e^{-0,0147t} + 100}$ **P4** $a = 0,0653$ et $a = 0,0147$, **P1**

b) À la limite, il y aura 100 kg de sel dans chaque réservoir.

$$q1(t):=100.-(10\cdot\sqrt{10}+50)\cdot e^{\left(\frac{\sqrt{10}}{125}-\frac{1}{25}\right)\cdot t}+(10\cdot\sqrt{10}-50)\cdot e^{\left(\frac{-\sqrt{10}}{125}-\frac{1}{25}\right)\cdot t} \qquad \textit{Terminé}$$

$$q2(t):=100.-(25\cdot\sqrt{10}+50)\cdot e^{\left(\frac{\sqrt{10}}{125}-\frac{1}{25}\right)\cdot t}+(25\cdot\sqrt{10}-50)\cdot e^{\left(\frac{-\sqrt{10}}{125}-\frac{1}{25}\right)\cdot t} \qquad \textit{Terminé}$$

$$\lim_{t\to\infty}(q1(t)) \qquad 100.$$

$$\lim_{t\to\infty}(q2(t)) \qquad 100.$$

c) Ça prend 50,92 minutes pour avoir 40 kg de sel dans le 2$^{\text{ème}}$ réservoir.

$\text{solve}(q2(t)=40,t)$

$t=-21.2513 \text{ or } t=50.9217$

5.25- $\mathscr{L}\{x\}=X \Rightarrow \mathscr{L}\{x'\}=s\cdot X-x(0)=s\cdot X-C$ **P16**, en suivant le conseil donné dans l'exercice : $x(0)=C$

$\mathscr{L}\{y\}=Y \Rightarrow \mathscr{L}\{y'\}=s\cdot Y-y(0)=s\cdot Y$ **P16**

et $\mathscr{L}\{y''\}=s^2Y-s\cdot y(0)-y'(0)=s^2Y-\frac{1}{2}$ **P17**

On prend la T.L. de chaque É.D. :

$\mathscr{L}\{x'\}+\mathscr{L}\{y'\}=\mathscr{L}\{\cos(t)\} \Rightarrow s\cdot X-C+s\cdot Y=\frac{s}{s^2+1}$ **P7** $\omega=1$

$\mathscr{L}\{x\}+\mathscr{L}\{y''\}=\mathscr{L}\{2\} \Rightarrow X+s^2Y-\frac{1}{2}=\frac{2}{s}$

On résout pour *X* et *Y* et on obtient

$$X=\frac{1}{2\left(s^2+1\right)}+\frac{C-2}{2(s+1)}+\frac{C-2}{2(s-1)}+\frac{2}{s}$$

$$Y=\frac{1}{2\left(s^2+1\right)}-\frac{C-2}{2(s+1)}-\frac{C-2}{2(s-1)}+\frac{C-2}{s}$$

$$\text{solve}\left(\begin{cases} s\cdot x-c+s\cdot y=\frac{s}{s^2+1} \\ x+s^2\cdot y-\frac{1}{2}=\frac{2}{s}\end{cases},\{x,y\}\right) \quad s\neq 0 \text{ and } x=\frac{2\cdot c\cdot s^4+s^3+2\cdot(c-2)\cdot s^2-s-4}{2\cdot s\cdot\left(s^4-1\right)} \text{ and } y=\frac{s^3-2\cdot(c-2)\cdot s^2-s-2\cdot(c-2)}{2\cdot s\cdot\left(s^4-1\right)}$$

$$\text{expand}(x)|s\neq 0 \text{ and } x=\frac{2\cdot c\cdot s^4+s^3+2\cdot(c-2)\cdot s^2-s-4}{2\cdot s\cdot\left(s^4-1\right)} \text{ and } y=\frac{s^3-2\cdot(c-2)\cdot s^2-s-2\cdot(c-2)}{2\cdot s\cdot\left(s^4-1\right)} \quad \frac{1}{2\cdot\left(s^2+1\right)}+\frac{c}{2\cdot(s+1)}-\frac{1}{s+1}+\frac{c}{2\cdot(s-1)}-\frac{1}{s-1}+\frac{2}{s}$$

$$\frac{1}{2\cdot\left(s^2+1\right)}+\frac{c}{2\cdot(s+1)}-\frac{1}{s+1}+\frac{c}{2\cdot(s-1)}-\frac{1}{s-1}+\frac{2}{s} \quad \frac{1}{2\cdot\left(s^2+1\right)}+\frac{c-2}{2\cdot(s+1)}+\frac{c-2}{2\cdot(s-1)}+\frac{2}{s}$$

$$\text{expand}(y)|s\neq 0 \text{ and } x=\frac{2\cdot c\cdot s^4+s^3+2\cdot(c-2)\cdot s^2-s-4}{2\cdot s\cdot\left(s^4-1\right)} \text{ and } y=\frac{s^3-2\cdot(c-2)\cdot s^2-s-2\cdot(c-2)}{2\cdot s\cdot\left(s^4-1\right)}$$

$$\frac{1}{2\cdot\left(s^2+1\right)}-\frac{c}{2\cdot(s+1)}+\frac{1}{s+1}-\frac{c}{2\cdot(s-1)}+\frac{1}{s-1}+\frac{c}{s}-\frac{2}{s}$$

$$\frac{1}{2\cdot\left(s^2+1\right)}-\frac{c}{2\cdot(s+1)}+\frac{1}{s+1}-\frac{c}{2\cdot(s-1)}+\frac{1}{s-1}+\frac{c}{s}-\frac{2}{s} \quad \frac{1}{2\cdot\left(s^2+1\right)}-\frac{c-2}{2\cdot(s+1)}-\frac{c-2}{2\cdot(s-1)}+\frac{c-2}{s}$$

Prenons les transformées inverses :

$x(t)=\frac{1}{2}\sin(t)+\frac{C-2}{2}e^{-t}+\frac{C-2}{2}e^{t}+2$ **P6** $\omega=1$, **P4** $a=1$ et $a=-1$, **P1**

$y(t)=\frac{1}{2}\sin(t)-\frac{C-2}{2}e^{-t}-\frac{C-2}{2}e^{t}+C-2$ **P6** $\omega=1$, **P4** $a=1$ et $a=-1$, **P1**

Maintenant $x(\pi)=2$ va nous aider à trouver la valeur de C.

$$\frac{\sin(t)}{2}+\frac{c-2}{2}\cdot\left(e^{-t}+e^{t}\right)+2|t=\pi \qquad \frac{\left(c\cdot\left(e^{2\cdot\pi}+1\right)-2\cdot\left(e^{2\cdot\pi}-2\cdot e^{\pi}+1\right)\right)\cdot e^{-\pi}}{2}$$

$$\text{solve}\left(\frac{\left(c\cdot\left(e^{2\cdot\pi}+1\right)-2\cdot\left(e^{2\cdot\pi}-2\cdot e^{\pi}+1\right)\right)\cdot e^{-\pi}}{2}=2,c\right) \qquad c=2$$

Donc $C=2$.

$$\boxed{x(t)=\frac{1}{2}\sin(t)+2} \qquad \boxed{y(t)=\frac{1}{2}\sin(t)}$$

5.26- $\mathscr{L}\{x\}=X \Rightarrow \mathscr{L}\{x'\}=s\cdot X-x(0)=s\cdot X-2$ **P16**

$\mathscr{L}\{y\}=Y \Rightarrow \mathscr{L}\{y'\}=s\cdot Y-y(0)=s\cdot Y+1$ **P16**

$\mathscr{L}\{z\}=Z \Rightarrow \mathscr{L}\{z'\}=s\cdot Z-y(0)=s\cdot Z$ **P16**

On prend la T.L. de chaque É.D. :

$\mathscr{L}\{x'\}-\mathscr{L}\{x\}+\mathscr{L}\{z'\}=4\mathscr{L}\{e^{-2t}\} \Rightarrow s\cdot X-2-X+s\cdot Z=\dfrac{4}{s+2}$ **P4** $a=2$

$\mathscr{L}\{y'\}+2\mathscr{L}\{y\}+\mathscr{L}\{z'\}=\mathscr{L}\{0\} \Rightarrow s\cdot Y+1+2Y+s\cdot Z=0$

$2\mathscr{L}\{x\}+\mathscr{L}\{y'\}+\mathscr{L}\{y\}+\mathscr{L}\{z\}=\mathscr{L}\{2\} \Rightarrow 2X+s\cdot Y+1+Y+Z=\dfrac{2}{s}$ **P1**

On va résoudre matriciellement.

$$\begin{cases}(s-1)X+s\cdot Z=\dfrac{4}{s+2}+2\\(s+2)Y+s\cdot Z=-1\\2X+(s+1)Y+Z=\dfrac{2}{s}-1\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}s-1 & 0 & s\\0 & s+2 & s\\2 & s+1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{4}{s+2}+2\\-1\\\dfrac{2}{s}-1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s-1 & 0 & s\\0 & s+2 & s\\2 & s+1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}\dfrac{4}{s+2}+2\\-1\\\dfrac{2}{s}-1\end{bmatrix}$$

$$X=\frac{13s}{3\left(s^2+2\right)}-\frac{2}{3\left(s^2+2\right)}-\frac{4}{3(s+2)}-\frac{1}{s+1}$$

$$Y=\frac{-s}{3\left(s^2+2\right)}-\frac{13}{3\left(s^2+2\right)}-\frac{8}{3(s+2)}+\frac{2}{s+1}$$

$$Z=\frac{-4s}{s^2+2}+\frac{5}{s^2+2}+\frac{2}{s+1}+\frac{2}{s}$$

$$x(t)=\frac{13}{3}\cos\left(\sqrt{2}\,t\right)-\frac{2}{3\sqrt{2}}\sin\left(\sqrt{2}\,t\right)-\frac{4}{3}e^{-2t}-e^{-t}$$

P7 et **P27** $\omega=\sqrt{2}$, **P4** $a=2$ et $a=1$

$$y(t)=\frac{-1}{3}\cos\left(\sqrt{2}\,t\right)+\frac{13}{3\sqrt{2}}\sin\left(\sqrt{2}\,t\right)-\frac{8}{3}e^{-2t}+2e^{-t}$$

P7 et **P27** $\omega=\sqrt{2}$, **P4** $a=2$ et $a=1$

$$z(t)=-4\cos\left(\sqrt{2}\,t\right)+\frac{5}{\sqrt{2}}\sin\left(\sqrt{2}\,t\right)+2e^{-t}+2$$

P7 et **P27** $\omega=\sqrt{2}$, **P4** $a=1$

$$\begin{bmatrix} s-1 & 0 & s \\ 0 & s+2 & s \\ 2 & s+1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} \frac{4}{s+2}+2 \\ -1 \\ \frac{2}{s}-1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \frac{(s+4)\cdot\left(2\cdot s^2+s-2\right)}{(s+1)\cdot(s+2)\cdot\left(s^2+2\right)} \\ \frac{-\left(s^3+4\cdot s^2+15\cdot s+6\right)}{(s+1)\cdot(s+2)\cdot\left(s^2+2\right)} \\ \frac{(s+4)\cdot(3\cdot s+1)}{s\cdot(s+1)\cdot\left(s^2+2\right)} \end{bmatrix}$$

$$\text{expand}\left(\begin{bmatrix} \frac{(s+4)\cdot\left(2\cdot s^2+s-2\right)}{(s+1)\cdot(s+2)\cdot\left(s^2+2\right)} \\ \frac{-\left(s^3+4\cdot s^2+15\cdot s+6\right)}{(s+1)\cdot(s+2)\cdot\left(s^2+2\right)} \\ \frac{(s+4)\cdot(3\cdot s+1)}{s\cdot(s+1)\cdot\left(s^2+2\right)} \end{bmatrix}\right) \quad \begin{bmatrix} \frac{13\cdot s}{3\cdot\left(s^2+2\right)}-\frac{2}{3\cdot\left(s^2+2\right)}-\frac{4}{3\cdot(s+2)}-\frac{1}{s+1} \\ \frac{-s}{3\cdot\left(s^2+2\right)}+\frac{13}{3\cdot\left(s^2+2\right)}-\frac{8}{3\cdot(s+2)}+\frac{2}{s+1} \\ \frac{-4\cdot s}{s^2+2}+\frac{5}{s^2+2}+\frac{2}{s+1}+\frac{2}{s} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{x(t)=\frac{13}{3}\cos\left(\sqrt{2}\,t\right)-\frac{\sqrt{2}}{3}\sin\left(\sqrt{2}\,t\right)-\frac{4}{3}e^{-2t}-e^{-t}}$$

$$\boxed{y(t)=\frac{-1}{3}\cos\left(\sqrt{2}\,t\right)+\frac{13\sqrt{2}}{6}\sin\left(\sqrt{2}\,t\right)-\frac{8}{3}e^{-2t}+2e^{-t}}$$

$$\boxed{z(t)=-4\cos\left(\sqrt{2}\,t\right)+\frac{5\sqrt{2}}{2}\sin\left(\sqrt{2}\,t\right)+2e^{-t}+2}$$

retour au début du chapitre 5